

2013年度 卒業論文

応答遅延による歪み集中切開モデル

2014年2月18日

大阪大学 基礎工学部
システム科学科 生物工学コース
古澤 大樹

主査: _____ 日付: _____

応答遅延による歪み集中切開モデル

古澤 大樹

概要

電子計算機の飛躍的進歩により、シミュレーション技術が様々な分野において一端を担っている。例として、医療分野が挙げられ、術前計画の立案や手術訓練システムの開発などに用いられている。手術訓練システムの開発では、実際の術中動作における多種多様な物理現象を複合的に表現することが必要とされる。従って、そのような複雑なシステムを開発するためには、あらゆる手術手技および医療器具を用いた際の生体組織への作用を物理則に従った形で表現する必要がある。手術環境において有効な医療器具の一つとして超音波メスが挙げられる。

超音波メスとは、メス先を高周波で振動させ、生体組織に切開作用および凝固作用をもたらす医療機器である。本研究では、刃に高周波振動を印加した際の切開現象についてシミュレーション可能なモデルの構築を行うことを目的とする。刃に振動を印加した場合、生体組織が高速で繰り返し伸縮されることとなり、組織内に局所的な歪みが発生し、応力の蓄積により組織に破壊が生じる。従って、振動印加時の切開作用を表現するためには、高周波振動を受けたことによる組織の動的挙動を詳細に解析することが必要である。本研究では、物体の変形モデルとしてバネ質点モデルを用い、生体組織の粘弾性は Kelvin-Voigt モデルにより表現した。また、メスと組織の接触については、接触問題において広く用いられるペナルティ法を採用し、組織の破壊判定には、六面体小領域ごとに計算されるミーゼス応力および累積疲労損傷則を用いた。

また、本モデルの表現能力を評価するために、組織の物性パラメータや振動振幅を変化させた際についてシミュレーションを行い、破断までの時間や応力分布を調べた。その結果、一般的な弾性体理論に基づく生体モデルの構築および実際の超音波メスと等価な作用を有する切開モデルの構築を行えていることが確認された。

キーワード：高周波振動，切開現象，バネ質点モデル，Kelvin-Voigt モデル，ペナルティ法，ミーゼス応力，累積疲労損傷則

Strain concentration cutting model resulting from delayed response

Daiki Furusawa

Abstract

The simulation technique plays a role in a variety of fields thanks to a rapid progress of computers. As an example, in medicine, the simulation technique is used in developing preoperative planning and training systems. In developing an operation training system, it is necessary to express a variety of physical phenomena in intraoperative motions integrally. Therefore, to construct such a complex system, we need to express an action to biological tissue in using operative procedures and medical equipments so as to follow a physical law. One of effective medical equipments in surgery is ultrasonic scalpel.

Ultrasonic scalpel is a medical equipment which cuts and coagulates biological tissue by vibrating a blade with a high frequency. The purpose of this study is constructing a model which can simulate cutting phenomenon in vibrating a blade with a high frequency. In vibrating a blade with a high frequency, biological tissue expands and contracts at a high speed. As a result, strain concentration occurs in surrounding biological tissues, and then the tissue is broken by stress accumulation. Therefore, dynamic behavior of tissue should be analyzed in detail to express cutting in vibrating a blade with a high frequency. In this study, the author adopted Mass-Spring model as a deformation model of the object and expressed viscoelasticity of tissue by Kelvin-Voigt model. Moreover, the author adopted a penalty method against contact problem between tissue and a blade. In regard to the judgement of broken tissue, the author took cumulative fatigue damage rule and von Mises stress which was calculated per hexahedral subregion.

To assess expressiveness of this model, the author simulated with physical parameter of tissue and vibration amplitude varied, and examined time to breakdown and stress distribution of tissue. As a result, the author confirmed that this model could express the property of an elastic body about biological tissue and cutting phenomenon which was equivalent to ultrasonic scalpel.

Keyword : High frequency oscillation, Cutting phenomenon, Mass-Spring model, Kelvin-Voigt model, Penalty method, von Mises stress, Cumulative fatigue damage rule

目次

第1章 序論	1
第2章 組織の変形・切開モデル	3
2.1 変形を扱う数値解析モデル	3
2.2 切開表現モデル	7
2.3 破壊現象	11
第3章 超音波振動による切開表現モデル	23
3.1 超音波メスによる切開の概要	23
3.2 生体組織のモデリング	24
3.3 刃と組織の接触問題	26
3.4 破壊条件	30
3.5 破壊後の計算処理	33
第4章 評価実験	36
4.1 実装システム	36
4.2 疲労破壊モデルの評価および考察	36
4.3 構築したモデルおよび各シミュレーションパラメータ	38
4.4 シミュレーション結果および考察	40
第5章 結論	45
謝辞	46
参考文献	47

目次

1.1	超音波メスによる切開	1
2.1	有限要素モデル	4
2.2	バネ質点モデル	5
2.3	粘性項を加えたモデル	5
2.4	変形過程	6
2.5	通常メスによる切開表現 (バネ質点モデル)	7
2.6	通常メスによる切開表現 (有限要素モデル)	8
2.7	電気メスによる切開表現	9
2.8	超音波メス	10
2.9	刃先の違い	10
2.10	応力の定義	11
2.11	物体の変形	12
2.12	xy 平面への投射	13
2.13	自然座標系への座標変換	16
2.14	自然座標系における積分点の位置	19
2.15	疲労寿命評価	20
2.16	応力ひずみ線図	21
2.17	修正マイナー則による累積疲労損傷則	22
3.1	超音波メスによる切開	23
3.2	Kelvin-Voigt モデルによるバネ質点モデル	24
3.3	三次元の格子形状および格子接続バネの詳細	24
3.4	質点の位置関係	25
3.5	刃が面を貫通している場合	26
3.6	接触点の位置	27
3.7	点の内外判定	28
3.8	ペナルティ法	29
3.9	接触位置に応じたペナルティ力	30

3.10	得られる応力波形	31
3.11	S-N 線図の作成	32
3.12	接続が断たれるバネの選択	33
3.13	接続が断たれるバネの選択 (せん断ばねを考慮した場合)	34
3.14	接続が断たれるバネの選択 (三次元の場合)	35
3.15	質点まわりの小領域が全て消滅した場合	35
4.1	応力波形の例 (重畳三角関数の周波数: 40 Hz)	37
4.2	構築したモデル	38
4.3	刃を組織の表面に対して平行に動かした場合	40
4.4	六面体小領域が破壊されるまでの様子および刃と組織間の接触状況	41
4.5	振動印加時と振動非印加時の比較	42
4.6	ヤング率による応力分布の違い	43
4.7	ヤング率による応力ひずみ線図の違い	44

表目次

2.1	ξ_i, η_i, ζ_i の定義	17
2.2	積分点の座標値	19
4.1	コンピュータの仕様および開発環境	36
4.2	重畳三角関数の周波数による破断時間の違い	37
4.3	N_{Fl} の値による破断時間の違い	37
4.4	刃のモデル仕様	38
4.5	生体組織のモデル仕様	39
4.6	シミュレーションパラメータの仕様	39
4.7	振動振幅による破壊時間の違い	41
4.8	ヤング率による破壊時間の違い	43

第1章 序論

物体は、外力が加わることにより変形する。変形の様子は荷重条件により変化し、例えば、静的に荷重を加えた場合と動的に荷重を加えた場合とでは変形に差異が見られる。静的な状態とは荷重が定常的であることを指す。それに対し、動的な状態とは荷重が時間的に変動することを指し、そのような荷重を与える物体として、振動を印加された物体が挙げられる。振動が印加されている物体は、時間的に変化する速度を有するため、衝突の際はその時の速度に応じた衝撃を生む。

これは工学的に広く用いられる物理現象であり、例として超音波振動がある。超音波とは“生物がコミュニケーションに用いる音声以外の音”と定義される音波であるが [1]、工学的には一般に高周波を指す。高周波の性質の一つとして小さな振動変位でも高い音圧と強力なパワー密度を有することが挙げられる。この性質を利用した技術が工作機械などに広く用いられている。医療分野においては、メス先を高周波振動させ、生体組織に機械的な切開作用を与える超音波メスが開発されている。利点として、振動の高密度エネルギーを利用し切開を行うため小さな変位で切開が可能であるという点と振動により生じた熱により組織に蛋白質の変性を与え（凝固）、出血を抑えながら切開を行えるという点が挙げられる。

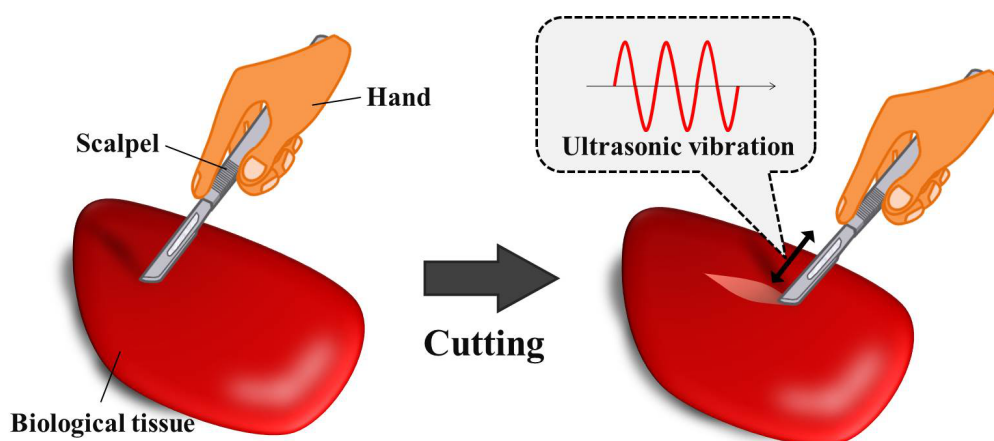


図 1.1: 超音波メスによる切開

近年、医師に対する医療教育を人工現実空間で行うことを目的とし、切開手技シミュレーションなどに関する研究が盛んに行われている。切開手技に用いられる器具として、通常のメスや電気メス、さらに超音波メスなどが挙げられるが、それぞれの器具により切開原理は異なり、超音波メスでは手による圧迫に加え、同時に振動エネルギーも用いて切開を行う。このような振動エネルギーを用いた切開現象を物理的に解析した研究は他に例を見ない。超音波メスの使用では、刃の振動振幅や組織の状態により作用が異なる。従って、超音波メスによる切開現象を表現する際には、メス側および組織側の各物性パラメータの違いを表現することのできるモデルが必要であると考えられる。

超音波メスを使用した場合、刃に高周波振動を印加したことにより、生体組織が高速で繰り返し伸縮されることとなり、組織内に局所的な歪みが発生し、応力蓄積がしきい値を越えることで破壊が生じる。従って、超音波メスによる切開現象についてシミュレーション可能なモデルの構築を行うためには、刃と組織の接触状態を厳密に扱い、かつ荷重周辺におけるせん断変形や組織の疲労破壊などについても考える必要がある。本研究では、これらのことを考慮し、高周波の振動を印加した際の切開現象についてシミュレーション可能なモデルの構築を行うことを目的とする。

第2章 組織の変形・切開モデル

本章では、まず2.1節にて弾性体を表現するための代表的な物理モデルについて述べる。次に2.2節では、種々の切開モデルについて例示する。最後に2.3節にて、一般的な固体の破壊現象について記述する。

2.1 変形を扱う数値解析モデル

計算力学では、数理モデル化によって表された微分方程式を離散化し、それにより得た代数方程式をコンピュータを用いて解析する。離散化の種類は様々存在し、それぞれの用途に適合する方法を選択する必要がある。

数値解析上、生体軟組織は一般に粘弾性を有する物体として扱われる。本節では、生体軟組織を表現する際の代表的な数値解析モデルである有限要素モデル及びバネ質点モデルについて述べる。

2.1.1 有限要素モデル

有限要素モデルでは、微分方程式の離散化を有限要素法という手法のもと行っている。有限要素法とは、微分方程式で表される場の問題を解くための解析手法の一つで、無限の自由度を持つ連続体を有限の大きさの要素 (Element) に分割して扱うことが特徴である。二次元の連続体領域を三角形要素で分割した場合の例を図2.1に示す。要素は、その辺上に位置する有限個の節点 (Node) により構成されており、固体の変形解析においてはこれらの節点の変位が解くべき未知数となる。全体の剛性マトリクス \mathbf{K} と系全体の荷重ベクトル \mathbf{F} を用いて、系全体の変位ベクトル \mathbf{U} が $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}$ で表される連立一次方程式を解くことにより求まる。また、個々の要素には形状関数というものが定義されており、この形状関数と節点の変位から要素内の変位場が一意的に決定される。得られた変位場から要素内のひずみ分布が計算され、さらに応力-ひずみ関係式を用いることにより応力分布を求めることができる [2]。

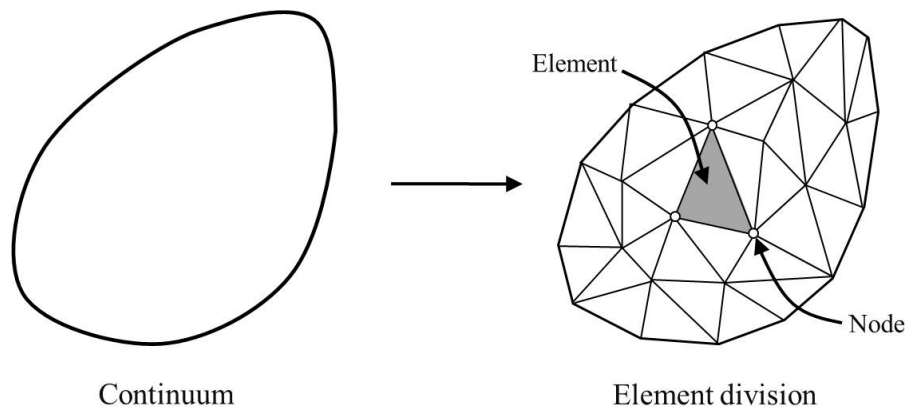


図 2.1: 有限要素モデル

有限要素モデルでは、一般に物理現象を詳細に表現することができるが、その反面、計算量は多く、モデル自体が複雑になってしまうという欠点を有する。また、生体軟組織を表現するためには、粘性項を考慮する必要があるが、有限要素法で粘性を考慮すると、一般に支配方程式が複雑になってしまい、計算量がより膨大になる [3].

2.1.2 バネ質点モデル

バネ質点モデルでは、図 2.2 のように物体が質点および質点間を結ぶバネにより構成される。質点ごとに各接続バネから作用する力を計算し、それらを合計し、各質点の位置を求める。この計算を全構成質点で行うことにより、物体全体の挙動を表現する。バネ質点モデルで計算を行う際は、微分方程式における導関数を差分によって近似することで差分方程式を作成し、これを数値的に解く手法（差分法）が用いられる。有限要素法と差分法の決定的な相違は、有限要素法では微分方程式を弱形式と呼ばれる積分形式に変換して間接的に解くが、差分法ではこの微分方程式を直接的に解くことにある [4].

各物性パラメタの設定において対象物体と整合性を図ることが難しいが、有限要素モデルよりも簡便に数値解析を行うことができ、処理時間においても有限要素モデルに比べて短い。また、バネ質点モデルでは比較的容易に粘性を考慮することができる。本研究では、このバネ質点モデルを用いて、粘性を考慮したモデルの構築を行う。

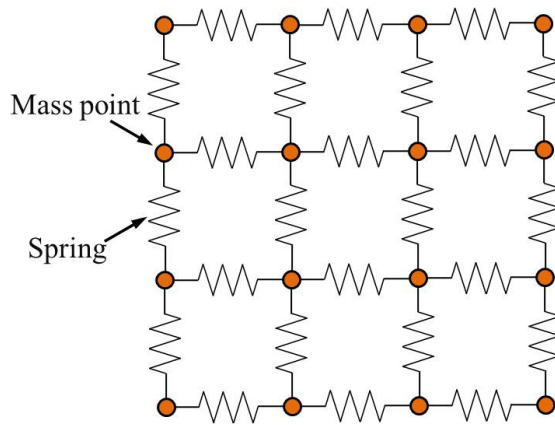


図 2.2: バネ質点モデル

一般に、粘性を考慮する際は図 2.3 のように、図 2.2 ではバネのみであった質点間の接続に、減衰要素を付け加えるだけで達成することができる。図 2.3 に粘性項を加えた場合の代表的なモデルを示す。Maxwell モデルはバネと減衰器を直列に接続したモデルである。また、Kelvin-Voigt モデルはこれらを並列に接続したモデルである。

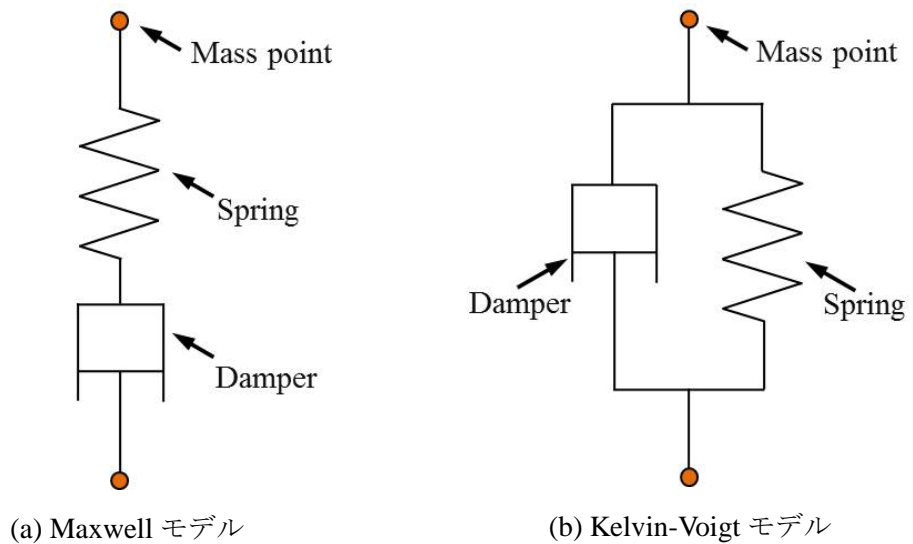
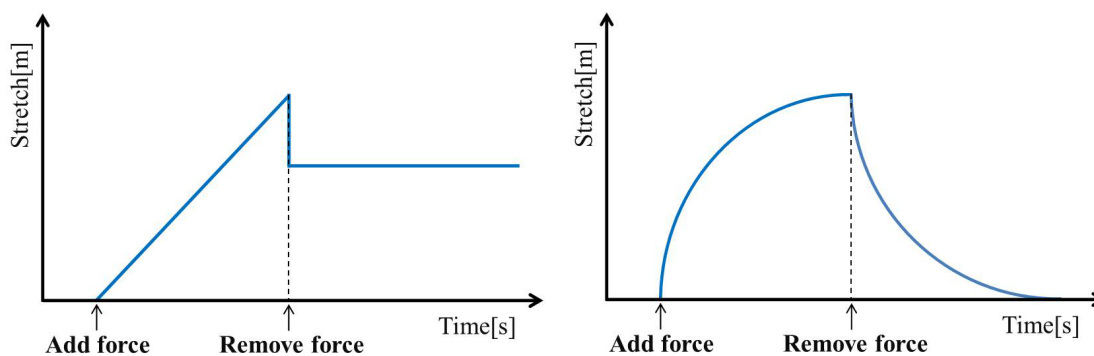


図 2.3: 粘性項を加えたモデル

図 2.4 に、Maxwell モデル及び Kelvin-Voigt モデルにおける時間と伸びの関係を示す。Maxwell モデルでは、力を加えると、瞬時にバネが伸びる。次に減衰器の部分が伸び、力を除すると、バネが瞬時に縮む。しかし、減衰器の部分は伸びた状態のまま維持されてしまい、元の長さには復元しない。一方、Kelvin-Voigt モデルでは、力を加えると、バネの部分が瞬時に伸びると同時に、減衰器がその伸びを抑制するために、結果として徐々にバネが伸びる。また、力を除した場合も、バネと減衰器が互いに影響を及ぼしあい、徐々に元の長さに復元する。本研究では、元の形状に復元する粘弾性物体を扱うため、Kelvin-Voigt モデルを用いて、組織の粘弾性を表現する。



(a) Maxwell モデル

(b) Kelvin-Voigt モデル

図 2.4: 変形過程

2.2 切開表現モデル

切開手技に用いられる手術器具として、通常のカッターや電気カッター、さらに超音波カッターなどが挙げられる。これらの切開原理にはそれぞれ違いが見られ、通常のカッターでは直接組織に圧迫を加えることにより破壊を行うが、電気カッターであれば熱エネルギーを介して破壊を行う。さらに超音波カッターは基本的に通常のカッターと同等の切開原理であるが、その際に振動エネルギーを用いる。

本節では、既存の切開モデルについて、通常のカッターによる切開とそれ以外の器具による切開に分類して紹介する。

2.2.1 通常のカッターによる切開

バネ質点モデルによる切開表現

D.Bielsler らは、四面体で対象物を分割し、モデルを構築している。バネ質点モデルにより数値計算を行っているため計算時間は短いが、四面体を分割することで切開を表現しているため、切開領域が広範になるに従い、計算時間も増大してしまう。また、D.Bielsler らは、切開時の反力生成についても記述しており、カッターと生体組織の接触により生じる摩擦力などについても考慮されたモデルとなっている [5]。

図 2.5 に、D.Bielsler らによるモデルを示す。図 2.5 左は、切開を行っている際の図である。また図 2.5 右は、その際の四面体メッシュを表示した図である。

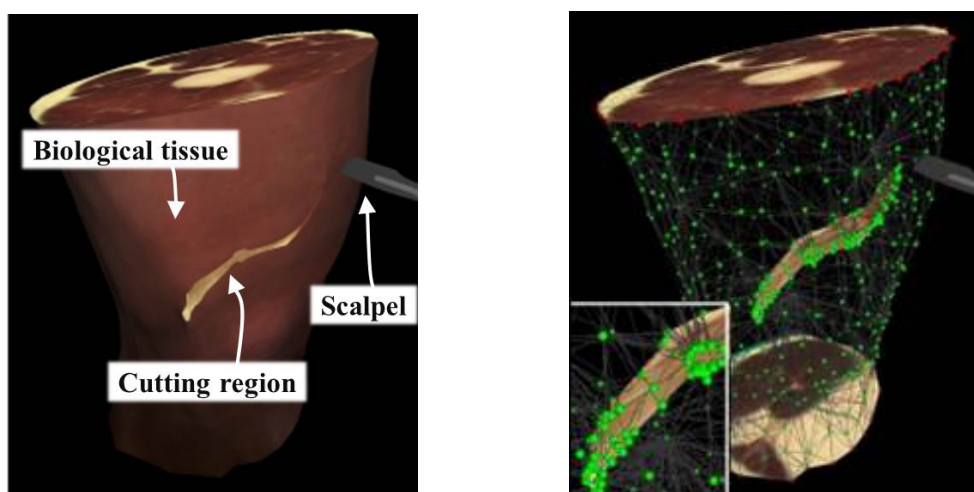


図 2.5: 通常のカッターによる切開表現（バネ質点モデル） [5]

有限要素モデルによる切開表現

河本らは、有限要素モデルを用い、切開シミュレーションを開発した。彼らは、切開の前後で節点の追加や要素の分割を行わないことで計算時間の増加を抑制している。また、剛性マトリクスの計算においては部分的に更新を行うことで、計算の高速化を図っており、実時間での切開シミュレーションを可能としている [6]。

図 2.6 に、河本らによるモデルを示す。上段は、切開面の生成に関する図である。切開を進める際に、要素が増大することなく、節点が切開面へと移動していることがわかる。また下段は、切開創の変形結果に関する図である。皮膚の張力により、結果が異なっていることがわかる（左：張力が小さい場合、右：張力が大きい場合）。

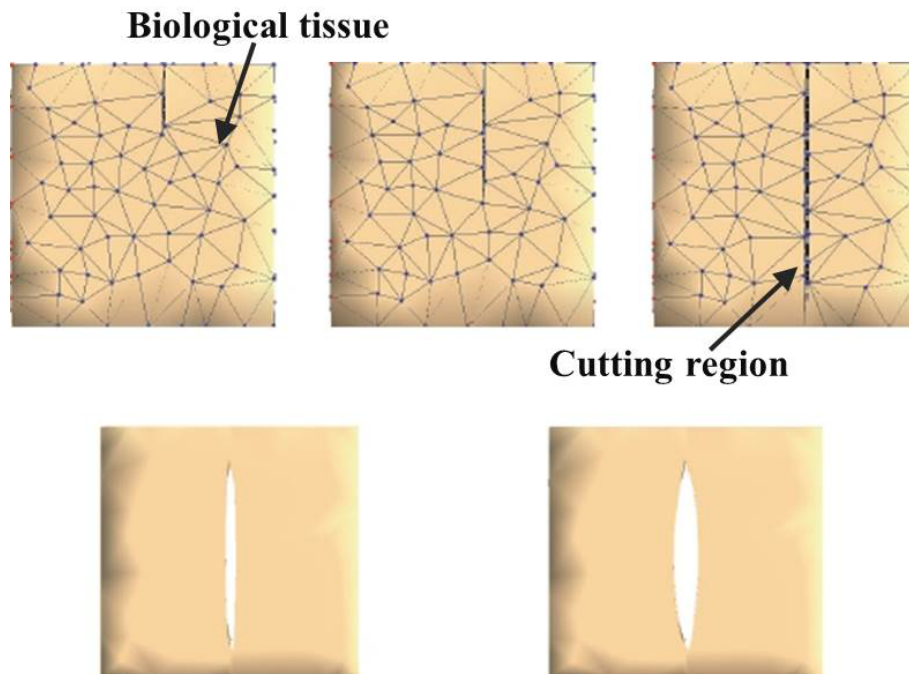


図 2.6: 通常のみスによる切開表現（有限要素モデル） [6]

2.2.2 手術用機器による切開

切開作用を及ぼす器具として広く知られるみスであるが実際には皮膚を切開する際に用いる程度で、体内における切開では主に、電気みスや超音波みスといった、患者に負担を及ぼさないような手術機器が用いられている。本小節では、これらに関する研究について述べる。

電気メス

田中らは、有限要素モデルを用いて、電気メスを使用している際の切開シミュレーションを構築した。電気メスとは、生体を負荷として高周波電流を流して、この時の負荷に発生する熱を利用して、切開作用、凝固作用を生じさせる医療機器である。田中らは、熱の発生や伝導に関する微分方程式を解き、さらに物質内の水分の気化も考慮した熱膨張に伴う応力を計算し、その計算された応力に基づき切開領域を判定している [7]。図 2.7 に田中らの行ったシミュレーションを示す。

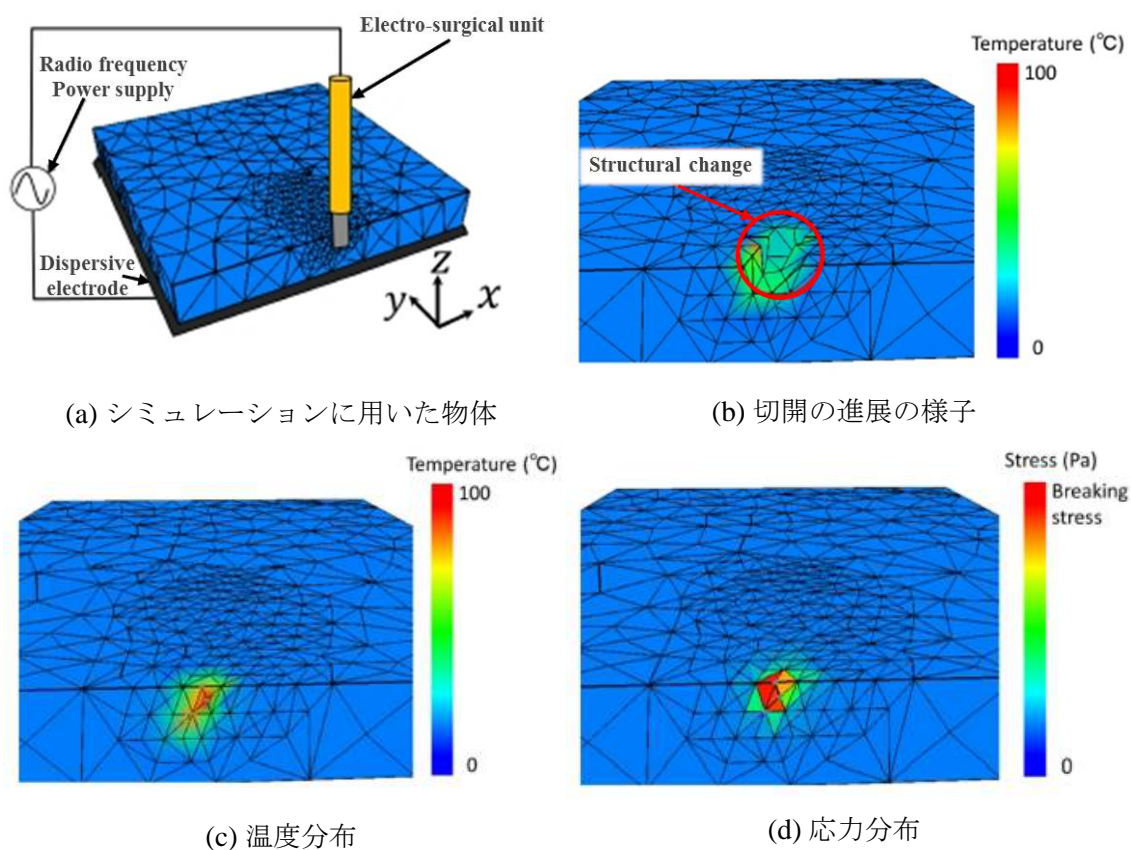


図 2.7: 電気メスによる切開表現 [7]

超音波メス

利便性の高い手術器具の一つに、超音波メスがある。超音波メスとは、メス先を高周波で振動させ、生体組織を切開したり、血管やリンパ管を凝固させたりする装置である。切開シミュレーションを行うためには、高周波振動を受けたことによる生体組織の動的挙動を詳細に解析することが必要であるが、現状、超音波メスの切開現象についてシミュレーション可能なモデルを構築している研究は他に例を見ない。

超音波メスの切開作用としては、振動の高密度なエネルギーを繰り返し受けたことによる機

械的作用，および振動に伴い生じる摩擦熱によって組織の粘弾性係数などが変化する熱的作用が考えられるが，後者については前者の作用に付随するものと考え，本研究では扱わない．また同様に，キャビテーション効果¹⁾による衝撃波の発生なども破壊に関わっていると考えられるが，この音響的な作用による破壊も超音波メスによる切開において支配的な作用ではないとされているため，こちらに関しても本研究では考慮しない [8]．

図 2.8 に，超音波メスの作動原理を示す．超音波メスの構成要素は主に，刃 (Blade)，ホーン (Horn)，圧電素子 (Piezoelectric element)，交流電源 (AC power supply) である．超音波メス内部にある圧電素子に交流電圧を印加することにより，圧電素子が伸縮を繰り返し，振動が発生する．この振動の振幅をホーンにより増幅させ，さらに先端に刃を取り付けることにより，刃の先端では振動の高密度なエネルギーを用いた破壊を行うことができる．なお，振動周波数は 45 ~ 55 kHz，振動振幅は 100 μm 程度である．

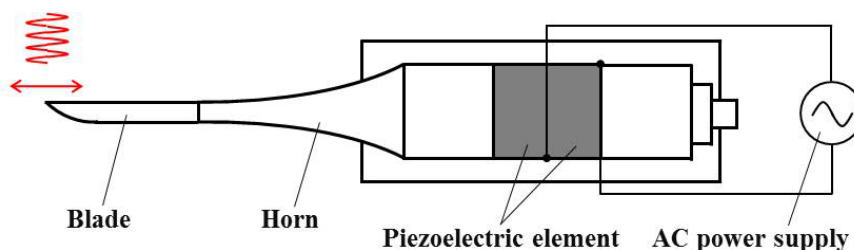


図 2.8: 超音波メス

また，用途により使用する刃の種類は異なる．図 2.9 に代表的な刃先を例示する．図 2.9(a) に示した刃はカタナ型と呼ばれる刃であり，通常のカッターのように扱われる．また図 2.9(b) に示した刃はフック型と呼ばれる刃であり，フック部分に組織を引っ掛け，切開を行う．さらに，図 2.9(c) に示した刃は鉗み型と呼ばれる刃であり，鉗み部分で血管などを挟み込み，作用を引き起こす．本研究では，最も形状が単純であるカタナ型を想定して，モデルの構築を行う．



図 2.9: 刃先の違い [9]

¹⁾液体に超音波を照射すると，液体が激しく揺さぶられて局所的に圧力が高い部分と低い部分が生じる．この圧力差により，短時間に気泡の発生と消滅が起こること．

2.3 破壊現象

本研究では、三次元弾性体の破壊現象を扱う。そこで本節では、まず2.3.1節にて一般的な弾性体理論について説明を行う。次に、2.3.2節では三次元物体における応力の導出方法について述べる。最後に2.3.3節にて、応力の蓄積により引き起こされる疲労破壊現象について記述する。

2.3.1 弾性体

本小節では、弾性体における応力とひずみの定義、および両者の関係について述べる。

(i) 応力

弾性体に外力が作用する際、物体内部にはそれに対する内力が生じる。内力を単位面積あたりの力として定義したものが応力である。応力は以下のように、面に垂直・平行な成分に分別される。

- ◆ 垂直応力：面に対して垂直に引張・圧縮として作用する応力
- ◆ せん断応力：互いの面をずらすように作用する応力

図2.10に応力の定義を示す。 σ_i は*i*軸の面に垂直に働く垂直応力であり、 τ_{ij} は*i*軸の面に垂直に働く*j*方向のせん断応力である。

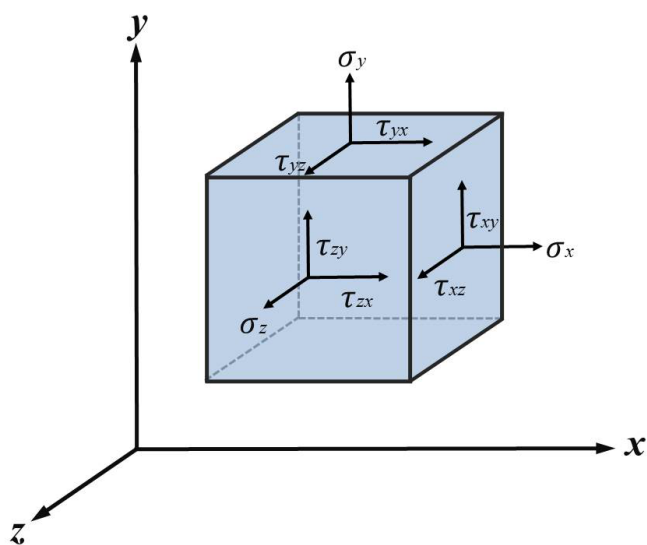


図 2.10: 応力の定義

三次元物体に発生する応力は、図 2.10 のように九つの成分から構成されており、応力テンソルとして式 (2.1) のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

しかし、せん断応力には共役性が存在し、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ の関係があるため、実質六つの独立した応力成分のみで表現することができる。式 (2.2) に独立した応力成分のみで表した応力ベクトル σ を示す。

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

(ii) ひずみ

物体に外力が作用し、内部に応力が発生すると、物体は変形する。ひずみとはその際の変形の大きさの程度を表す指標である。物体内部の各点の座標は変形前後で異なり、物体内部の各点の移動量は変位と呼ばれる。図 2.11 に物体の変形状態を示す。

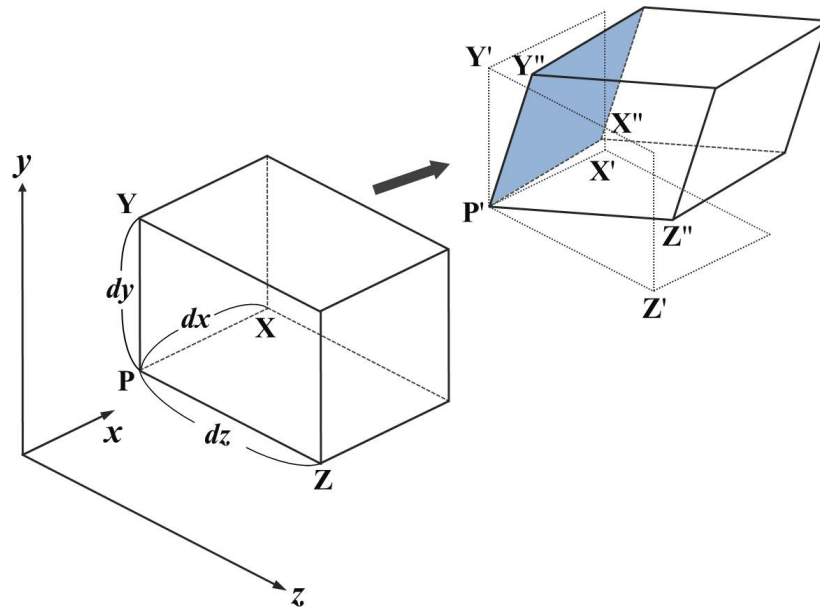


図 2.11: 物体の変形

物体内の一点 $P(x, y, z)$ が変形により、点 $P'(x+u, y+v, z+w)$ に移動したとする。この移動に伴い、点 P より dx, dy, dz だけ離れた点 X, Y, Z は点 X'', Y'', Z'' に移動する。この場合のひずみを求めるために、次の二つの段階に分けて考える。

- ◆ 段階 1 : PX, PY, PZ がそれぞれの座標軸に平行な状態を保ったまま、 $P'X', P'Y', P'Z'$ に移動すると考える。
- ◆ 段階 2 : X', Y', Z' が X'', Y'', Z'' に移動すると考える。

段階 1 は座標軸に沿う各辺の伸び・圧縮を意味しており、垂直ひずみと呼ばれる。また段階 2 は xy, yz, zx 平面に平行な面でのゆがみを意味しており、せん断ひずみと呼ばれる。

以下、図 2.12 に示すように、 xy 平面への投射を考える。

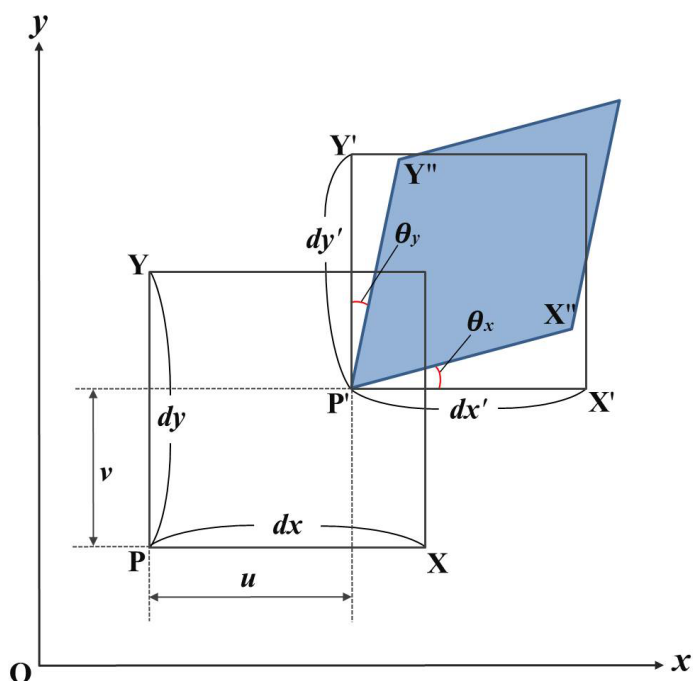


図 2.12: xy 平面への投射

垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ とせん断ひずみ γ_{xy} は式 (2.3)~式 (2.5) のように定義される。

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{dy' - dy}{dy} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \theta_x + \theta_y \quad (2.5)$$

以下では、式 (2.3)~式 (2.5) で定義した垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ およびせん断ひずみ γ_{xy} を変位 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ を用いて表す。

垂直ひずみ

まず、 x 方向の垂直ひずみについて考える。 \mathbf{X}' の x 座標は変位 $u(x, y, z)$ を用いて、 $x + dx + u(x + dx, y, z)$ と表すことができる。 \mathbf{P} 点まわりのテイラー展開を考え、二次以上の項を無視すると、式 (2.6) の関係を得ることができる。

$$u(x + dx, y, z) \simeq u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2.6)$$

よって、 dx' は以下のように変形することができる。

$$\begin{aligned} dx' = |\mathbf{P}'\mathbf{X}'| &= x + dx + u(x + dx, y, z) - (x + u(x, y, z)) \\ &= x + dx + u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x} dx - (x + u(x, y, z)) \\ &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \end{aligned}$$

従って、 x 方向の垂直ひずみ ε_x は、式 (2.3) より式 (2.7) のように求めることができる。

$$\varepsilon_x = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

y 方向の垂直ひずみ ε_y も同様に、式 (2.4) を用いることにより式 (2.8) のように求めることができる。

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.8)$$

せん断ひずみ

\mathbf{X}' の y 座標は \mathbf{P}' の y 座標と等しいため、変位 $v(x, y, z)$ を用いて、 $y + v(x + dx, y, z)$ と表すことができる。また式 (2.6) と同様に、式 (2.9) に示す関係を得ることができる。

$$v(x + dx, y, z) \simeq v(x, y, z) + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (2.9)$$

従って、 θ_x は式 (2.10) のように求めることができる。

$$\theta_x = \frac{|\mathbf{X}'\mathbf{X}''|}{dx'} = \frac{y + v(x + dx, y, z) + \frac{\partial v}{\partial x} dx - (y + v(x, y, z))}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.10)$$

ただし、 $dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx = dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \simeq dx$ では、 $\frac{\partial u}{\partial x}$ が 1 に比べて非常に小さいという条件を用いている。

同様に, θ_y は式 (2.11) のようになる.

$$\theta_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.11)$$

従って, せん断ひずみ γ_{xy} は式 (2.5) より式 (2.12) のように得ることができる.

$$\gamma_{xy} = \theta_x + \theta_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.12)$$

以上のように, xy 平面への投射を考えることによって, 垂直ひずみ・せん断ひずみを求めることができる. ここでは二次元平面への投射を考えて, ひずみを求めたが, これは三次元を二次元に投影したものといえる. 従って, 同様に yz 平面への投射, zx 平面への投射を考えることにより, ε_z , γ_{yz} , γ_{zx} も求めることができる. 以上をひずみベクトルとしてまとめて記すと, 式 (2.13) のようになる.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

(iii) 応力-ひずみ関係式

式 (2.2) に示す応力ベクトルと式 (2.13) に示すひずみベクトルには式 (2.14) に示すような関係がある [10]. E , ν は, それぞれヤング率, ポアソン比である. ヤング率は, 一方向の引張応力もしくは圧縮応力と応力方向に対するひずみの比であり, ポアソン比は, 荷重方向の伸びと荷重方向に垂直な方向の縮みの比である.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

2.3.2 応力の導出

三次元物体において応力を求める場合、物体を四面体小領域や六面体小領域で分割し、それぞれの小領域ごとに応力を求める。本研究では、六面体で物体を分割し応力を考えるため、本小節ではその応力の導出方法について述べる。

(i) 座標変換

六面体小領域ごとに応力を求める場合は、数値計算において便宜を図るために、六面体小領域を全体座標系 (x, y, z) ではなく自然座標系 (ξ, η, ζ) で考える。図 2.13 に全体座標系から自然座標系への座標変換の概念を示す。自然座標系では $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, $-1 \leq \zeta \leq 1$ の領域の立方体を考える。小領域内の任意点は、全体座標系と自然座標系で 1 対 1 対応をしている。

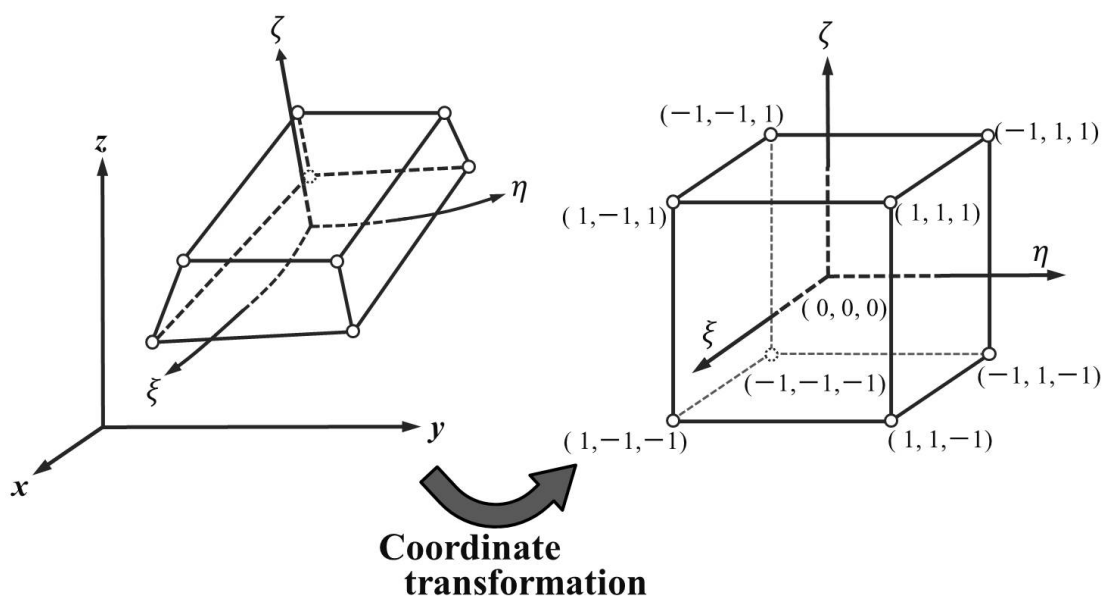


図 2.13: 自然座標系への座標変換

(ii) 形状関数

小領域内の変位 (u, v, w) は、六面体の八つの頂点のそれぞれの変位 (u_i, v_i, w_i) を用いて、式 (2.15)~式 (2.17) のように一次式で近似される。 i は六面体を構成する質点の番号を示している。

$$u = \sum_{i=1}^8 G_i u_i \quad (2.15)$$

$$v = \sum_{i=1}^8 G_i v_i \quad (2.16)$$

$$w = \sum_{i=1}^8 G_i w_i \quad (2.17)$$

式 (2.15)~式 (2.17) における G_i は形状関数と呼ばれるもので、表 2.1 の ξ_i, η_i, ζ_i を用い、式 (2.18) のように表されるものである。

表 2.1: ξ_i, η_i, ζ_i の定義

質点番号	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ_i	-1	1	1	-1	1	1	1	-1
η_i	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
ζ_i	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

$$G_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) \quad (2.18)$$

また、全体座標系における小領域内の座標も式 (2.15)~式 (2.17) と同様に、式 (2.19)~式 (2.21) のように表される。

$$x = \sum_{i=1}^8 G_i x_i \quad (2.19)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 G_i y_i \quad (2.20)$$

$$z = \sum_{i=1}^8 G_i z_i \quad (2.21)$$

(iii) 応力ベクトルの導出

小領域ごとのひずみベクトルを求め、それを式(2.14)に代入し、応力ベクトルを求める。従って、まずひずみベクトルの導出について述べる。ひずみベクトルを求めるためには、式(2.13)に示すように、変位 (u, v, w) を全体座標系 (x, y, z) に関して偏微分したものが必要となる。しかし、変位は式(2.15)~式(2.17)に示すように、直接 x, y, z の関数にはなっておらず、変位の偏微分を行う際には、自然座標系に関する偏微分を考える必要がある。自然座標系に関する偏微分は式(2.22)のようになり、 3×3 のヤコビマトリクス \mathbf{J} を必要とする。従って、全体座標系に関する偏微分は、このヤコビマトリクスの逆行列を用い、式(2.23)のように表される。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

式(2.23)の偏微分を u, v, w それぞれに作用させ、式(2.13)より、ひずみベクトルを得る。これを式(2.14)に代入し、応力ベクトルを求めることができる。

六面体小領域ごとの応力値の算出

以上の方法で応力ベクトルを求める場合、その応力ベクトルは、小領域内の積分点 (Integration point) と呼ばれる計算上のある一点で計算されるベクトル量である。図 2.14 に自然座標系における積分点の位置 (八点) を示す。表 2.2 は自然座標系における積分点の座標値である。

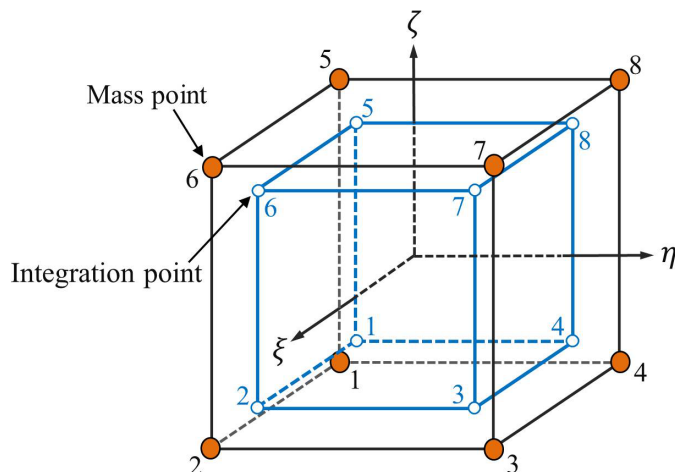


図 2.14: 自然座標系における積分点の位置

表 2.2: 積分点の座標値 $\left(\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

積分点番号	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ	$-\kappa$	κ	κ	$-\kappa$	$-\kappa$	κ	κ	$-\kappa$
η	$-\kappa$	$-\kappa$	κ	κ	$-\kappa$	$-\kappa$	κ	κ
ζ	$-\kappa$	$-\kappa$	$-\kappa$	$-\kappa$	κ	κ	κ	κ

積分点の座標値を用いてそれぞれの積分点ごとに応力ベクトルを求めるため、最も精度の高い応力ベクトル量が出力されるのも積分点である。しかし、積分点ごとの応力ベクトル量では扱いが難しいため、一般に、この積分点での応力ベクトルから小領域ごとの応力ベクトルを以下のように定義し、六面体小領域ごとの応力とする。式 (2.24) は、以下の定義を定式化したものである。 i は六面体小領域ごとの積分点番号を示している。

(六面体小領域ごとの応力ベクトル σ_{HS})
 = (小領域内の全積分点での応力ベクトル σ_i に対して相加平均を取得したベクトル)

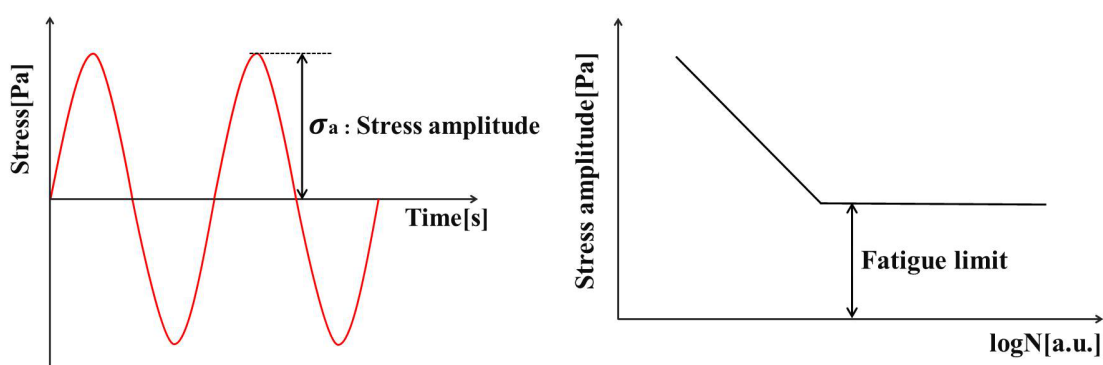
$$\sigma_{HS} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \sigma_i \quad (2.24)$$

2.3.3 累積疲労損傷則による疲労破壊の定義

材料が繰り返し荷重を負荷される場合、材料内部に疲労が生じ、静的な応力を負荷されるよりもはるかに低い応力で破壊される。本小節では、一般的な疲労破壊の定義について述べる。

疲労破壊

疲労破壊とは、時間的に変動する繰り返し荷重により材料強度が低下して生じる破壊現象である。疲労破壊に至るまでの疲労寿命は繰り返し応力の波形に依存する。図 2.15(a) に繰り返し応力の波形を示す。図 2.15(a) に矢印で示す長さを応力振幅 (σ_a : Stress amplitude) と呼ぶ。材料の疲労強度特性は、負荷する応力振幅 σ_a と破壊繰り返し数 N との関係で表される。この両者の関係を表現する図を S-N 線図と呼ぶ。図 2.15(b) に S-N 線図の例を示す。図 2.15(b) において、S-N 線図の水平部分は無限の繰り返し数に対しても疲労破壊を起こさない応力振幅の上限を示しており、疲労限度 (Fatigue limit) と呼ばれる。疲労試験を行い、S-N 線図を作成することにより、材料がどれくらいの繰り返し応力にどれくらいの繰り返し回数耐えることが可能であるのかを評価することができる。



(a) 繰り返し応力の波形

(b) S-N 線図の例

図 2.15: 疲労寿命評価

図 2.16 に弾性体の応力ひずみ線図を示す。応力ひずみ線図の直線的な部分は弾性域と呼ばれ、この直線の傾きが弾性率と定義される。弾性域を超えると、応力は上昇せず、ひずみだけが進行するようになる。この時の変曲点を降伏点（Yield point）と呼ぶ。さらに、応力ひずみ線図は引張強さ（Tensile strength）と呼ばれる応力ひずみ線図中で最大の応力を示す点を通り、最終的に破断点（Breaking point）で物体は破断する。

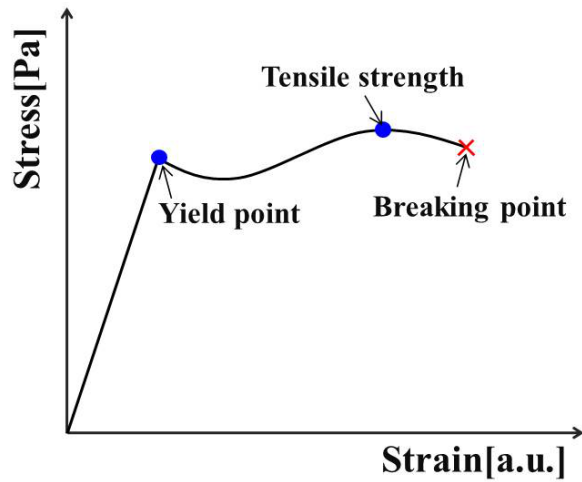


図 2.16: 応力ひずみ線図

引張強さと疲労限度には強い相関が認められ、一般に引張強さの $\frac{1}{2}$ 倍が疲労限度とされる。また、S-N 線図において水平へと折れ曲がる際の繰り返し数は実際の疲労試験により決定されるものである。

累積疲労損傷則

実際の応力は図 2.17 左のように応力振幅が一定ではない。このような応力波形を示す場合の疲労寿命評価を行う際には、累積疲労損傷則が用いられる。図 2.17 に修正マイナー則による累積疲労損傷則を示す。

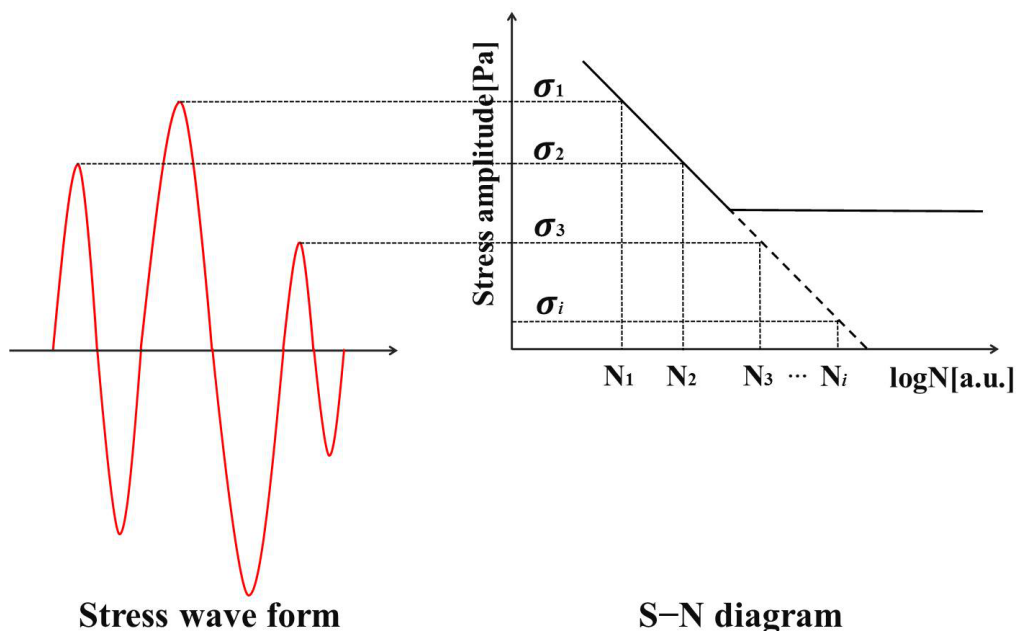


図 2.17: 修正マイナー則による累積疲労損傷則

修正マイナー則による累積疲労損傷則とは、疲労限度よりも小さい応力振幅についても材料に損傷を与える応力とする手法であり、S-N 線図の傾きを疲労限度以下まで直線で延長し、全ての応力振幅について破断繰り返し回数と線形関係を有するように修正を加えた S-N 線図である。

応力波形を分析した結果、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_i$ の応力振幅がそれぞれ、 $N'_1, N'_2, N'_3, \dots, N'_i$ 回繰り返し発生していたとする。また、各応力振幅に対応する破断までの繰り返し回数を S-N 線図から取得し、その回数が $N_1, N_2, N_3, \dots, N_i$ であったとする。ここで、各応力振幅による疲労損傷が線形に蓄積されると仮定することで、各応力振幅が材料に与える損傷度を $\frac{N'_1}{N_1}, \frac{N'_2}{N_2}, \frac{N'_3}{N_3}, \dots, \frac{N'_i}{N_i}$ と定義する。最後に、これら各応力振幅が材料に与える損傷度を合計する。

累積疲労損傷則では、取得した総和を全体の損傷度 D とし、 $D \geq 1$ となった際に破壊が生じると定義する。D の定義を式 (2.25) に示す、

$$D = \sum \frac{N'_i}{N_i} \quad (2.25)$$

第3章 超音波振動による切開表現モデル

本章では、本研究で構築した切開表現モデルについて述べる。まず3.1節にて、超音波メスによる切開の概要を述べる。次に、3.2節にて生体組織のモデリングについて記し、3.3節にて刃と組織の接触問題について述べる。さらに、3.4節および3.5節では、構築物体の破壊条件および破壊表現について記述する。

3.1 超音波メスによる切開の概要

超音波振動による切開の概要を図3.1に示す。刃に高周波振動を印加していることにより、生体組織が高密度な振動エネルギーを受けることとなり、生体組織内に局所的な歪みが発生し、応力蓄積がしきい値を越えることで破壊が生じる。

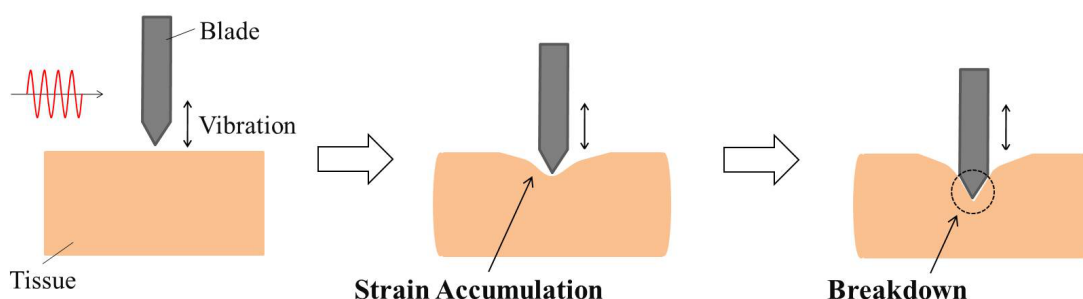


図 3.1: 超音波メスによる切開

超音波メスによる切開現象についてシミュレーション可能なモデルの構築を行うためには、刃と組織の接触状態を厳密に扱い、刃が組織に及ぼす接触力について考える必要がある。また、局所的な破壊を扱うため、荷重周辺におけるせん断変形についても考えることが必要であると思われる。さらに、組織への圧迫が繰り返し行われていることから、応力集中が生じていると考えられる。従って、そのような応力集中による組織の疲労破壊についても考慮することが必要である。本研究では、高周波の振動を印加した際の切開現象について、これらの方を考慮したモデルの構築を行う。

3.2 生体組織のモデリング

3.2.1 生体組織の扱いおよびモデル形状

本研究では、生体組織の粘弾性を考慮した数値計算を行うために、図 3.2 に示すような質点間を Kelvin-Voigt モデルにより接続したバネ質点モデルを採用している。ただし以下では、表現の簡便化のため、質点間を接続するバネ及び減衰器をバネ（接続バネ）と表現する。

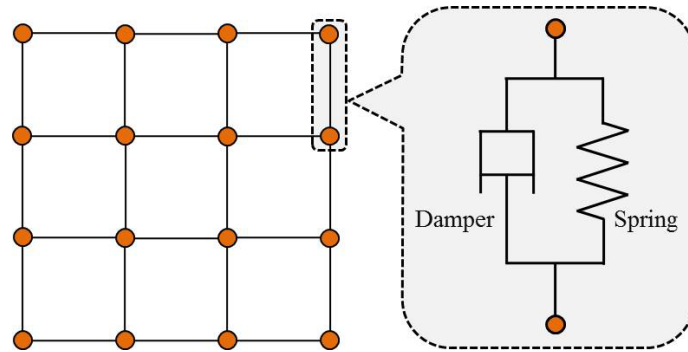


図 3.2: Kelvin-Voigt モデルによるバネ質点モデル

図 3.3 に生体組織のモデル形状を示す。本研究では、生体組織を六面体で分割された三次元物体として表現する。各格子におけるバネの接続は、図 3.3 左に示すようになっている。格子を縦横に接続する黒色で示すバネ（12 本）のみでは斜め方向の荷重により潰れてしまうため、それらに加え、格子の面内を斜めに接続する青色で示したバネ（12 本）と、格子の内部を斜めに貫くように接続する赤色で示したバネ（4 本）、計 28 本の接続バネにより格子は構成されている。

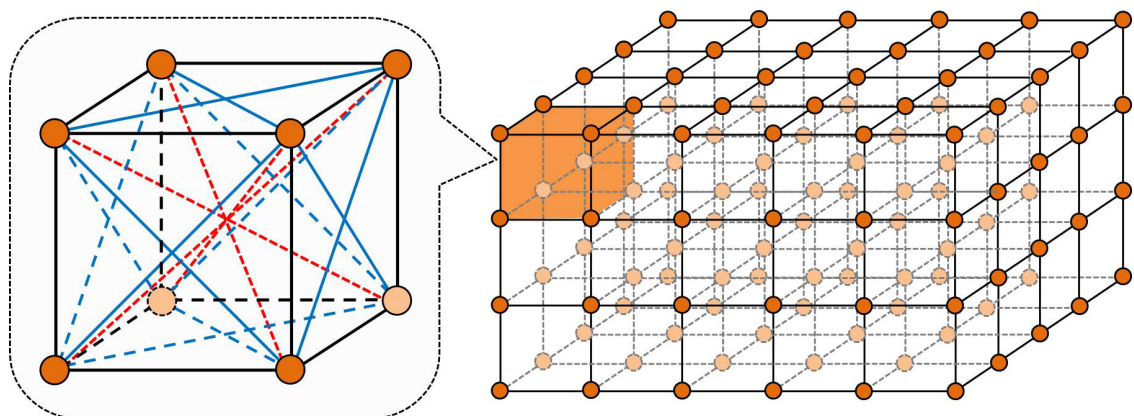


図 3.3: 三次元の格子形状および格子接続バネの詳細

3.2.2 各質点に作用する力

各質点に働く力は、図 3.4 に示すように、質点 i および質点 i に接続される近傍の質点 j を考えることにより計算される。質点 i にそれぞれの質点 j から及ぼされる力の総和 \mathbf{F}_i は式 (3.1) で表される。

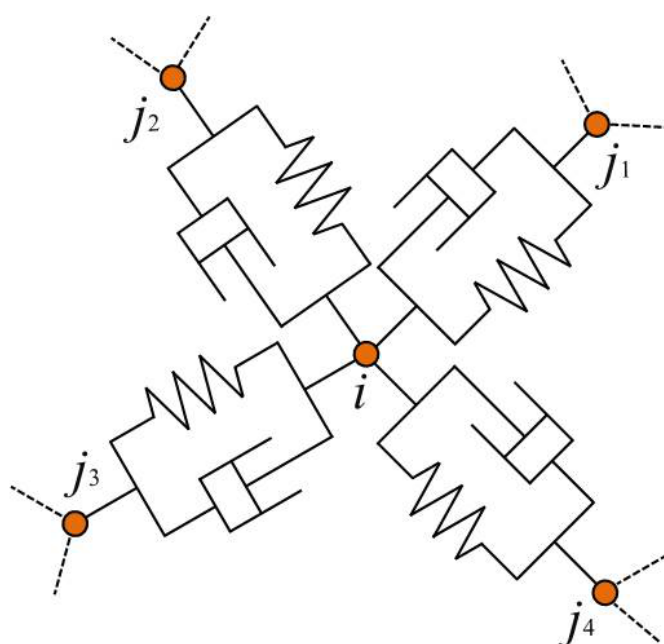
$$\mathbf{F}_i = \sum_j \left\{ -k(l - |\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|) \frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|} - b(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) \right\} \quad (3.1)$$

l はバネの自然長、 k はバネ係数、 b は粘性係数、 \mathbf{R}_i 、 \mathbf{R}_j 、 \mathbf{V}_i および \mathbf{V}_j はそれぞれ質点 i 、 j の位置ベクトル、速度ベクトルを表している。

式 (3.1) により算出した各質点に加わる力の総和を用い、各質点の微小時間 δt 秒後の速度および変位を求めることができる。各質点の速度および変位は、Euler 法による近似を用いて、式 (3.2)、式 (3.3) を順に計算し算出される。 m は質点 i の質量、 t は時間を示している。

$$\mathbf{V}_i(t + \delta t) \approx \mathbf{V}_i(t) + \frac{\mathbf{F}_i}{m} \delta t \quad (3.2)$$

$$\mathbf{R}_i(t + \delta t) \approx \mathbf{R}_i(t) + \mathbf{V}_i(t + \delta t) \delta t \quad (3.3)$$



i, j : Number of mass point

図 3.4: 質点の位置関係

3.3 刃と組織の接触問題

本研究では粘弾性体の破壊シミュレーションを行うため、刃と組織の間に生じる接触力について考える必要がある。本節ではまず、3.3.1節にて接触判定について述べる。また3.3.2節では、接触力の定義、および接触力が組織に及ぼす作用について記述する。

3.3.1 刃と組織の接触判定

本研究では、刃を任意の長さを有する線分として扱う。また刃先を質点として考えることで刃の質量を定義する。刃と組織の接触については、物体表面において四面体の面ごとに接触判定を行う（図 3.3 参照）。なお、物体の形状が破壊により変化した場合は、その領域に対しても接触判定を行う。以下では、面ごとの接触判定について説明を行う。

無限平面と線分の接触判定

まず、各面を無限平面と考え、刃先が面を貫通しているか否か判定を行う。刃が面を貫いている場合を図 3.5 に示す。刃は線分 p_0p_1 で表されている。ここで、点 $p_a \sim p_d$ を頂点とする四角形が作る面 H を考える。 \mathbf{n} は面 H に対する法線ベクトルであり、 θ_0 、 θ_1 はそれぞれ $\mathbf{p}_a\mathbf{p}_0$ 、 $\mathbf{p}_a\mathbf{p}_1$ が \mathbf{n} との間に作る角である。なお、 \mathbf{n} は正規化されているものとする。

刃が面と接触している場合、点 p_0 は面の裏側に、一方、点 p_1 は面の表側に存在する。したがって、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 \leq \pi$ 、 $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ となるため、式 (3.4) に示すような条件を満たす。

$$(\mathbf{p}_a\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{p}_a\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) \leq 0 \quad (3.4)$$

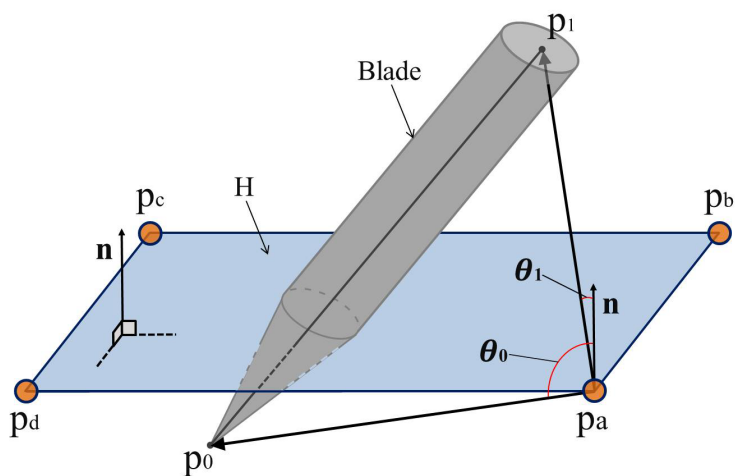


図 3.5: 刃が面を貫通している場合

接触位置の導出

式(3.4)の条件を満たす面に対して、以下の処理を行い、面上の接触点の位置を求める。図3.6は接触点 p_t を示した図である。図3.6のように q を設定した場合、式(3.5)に示すような関係を得ることができる。

$$\mathbf{p_a p_t} = (1 - q) \mathbf{p_a p_0} + q \mathbf{p_a p_1} \quad (3.5)$$

また、 d_0 、 d_1 はそれぞれ面 H と点 p_0 、 p_1 との距離である。 $(1 - q) : q = d_1 : d_0$ の関係式と \mathbf{n} が正規化されていることを考えると、式(3.5)は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} \mathbf{p_a p_t} &= \frac{d_1}{d_0 + d_1} \mathbf{p_a p_0} + \frac{d_0}{d_0 + d_1} \mathbf{p_a p_1} \\ &= \frac{(\mathbf{p_a p_1} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{p_a p_0} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{p_a p_1} \cdot \mathbf{n})} \mathbf{p_a p_0} + \frac{(\mathbf{p_a p_0} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{p_a p_0} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{p_a p_1} \cdot \mathbf{n})} \mathbf{p_a p_1} \end{aligned}$$

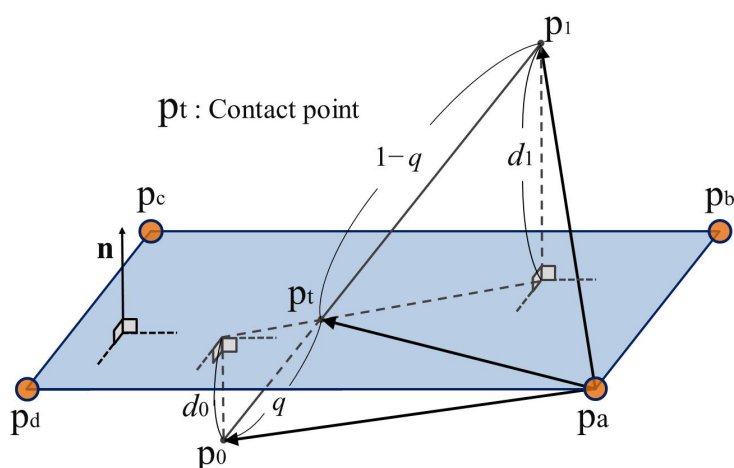


図 3.6: 接触点の位置

接触点が存在する面の判定

上記の判定は、無限平面に対する接触判定であった。次に、この接触点の存在範囲が点 $p_a \sim p_d$ により作られる四角形領域内であるか否かの判定方法について述べる。図3.7に領域内に存在する接触点 (p_t) と領域外に存在する接触点 (p'_t) について示した図を示す。

異なる二つのベクトルに対して外積計算を行うことにより求まるベクトルはその二つのベクトルが存在する平面に対する法線ベクトルである。図3.7の矢印方向に従ってベクトルを設定し、同色同士で外積計算を行うと、接触点が領域内に存在する場合は図3.7(a)のように、求まる四つの法線ベクトルが全て同一の方向を向く。一方、図3.7(b)のように領域外に接触点が存在する場合には、求まる四つの法線ベクトルの中に反対方向を向いてしまう法線ベクトルが存在する。以上の方法を用いて、接触点が領域内に存在するか否かを判定することができる。

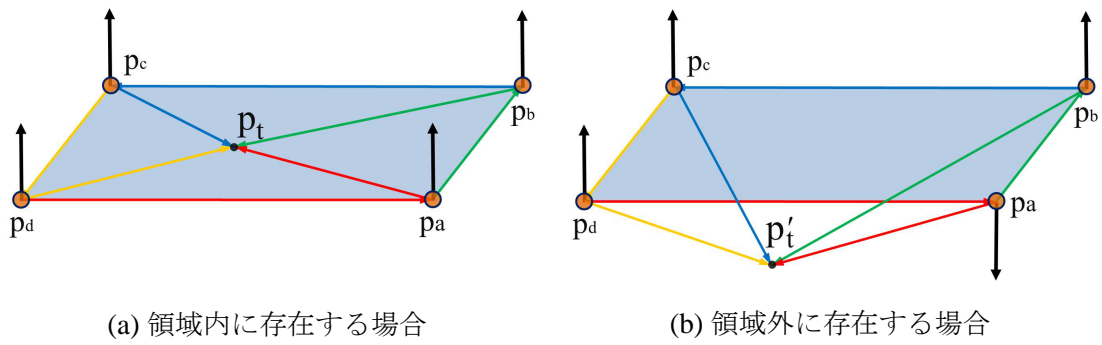


図 3.7: 点の内外判定

3.3.2 刃が物体に及ぼす力の計算

刃が物体に及ぼす力により、組織は破壊される。本小節では、振動する刃の扱い、およびペナルティ法に基づく接触力の発生について説明を行う。

刃の振動力

超音波メスによる作用は、刃の振幅および周波数に依存する。従って、刃のモデルを構築する際には、振動中心からの変位に依存した力を定義する必要がある。刃は振幅 A 、角周波数 ω で振動しているため、刃先は常に振動中心より $A \sin \omega t$ だけ変位している。したがって、刃の質量を M_b とすると、刃先には使用者の加える力 \mathbf{F}_{user} に加え、角周波数の二乗に比例した $-M_b A \omega^2 \sin \omega t$ の力が刃の振動方向に作用していると考えることができる。式 (3.6) に刃先の質点に加わる力 \mathbf{F}_b を示す。ただし、 \mathbf{I}_{VD} は正規化された振動方向ベクトルを指す。

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_{\text{user}} - (M_b A \omega^2 \sin \omega t) \mathbf{I}_{VD} \quad (3.6)$$

ペナルティ法による接触力の発生

本研究では、ペナルティ法により接触力を定義し、シミュレーションを行う。ペナルティ法について図 3.8 に示す。ペナルティ法とは、物体同士の侵入を許容し、その侵入量（ペナルティ）および侵入時の相対速度に応じた力（仮反力）を両物体に返すことで、物体の侵入を抑制する方法である。二物体の間に仮想のバネおよび仮想の減衰器を考え、接触した際には、これらが発生させる抗力を接触力として両物体に返す。

本研究では超音波振動を扱っているため、接触時、組織と刃の相対速度は非常に大きくなる。ペナルティ法を用いて仮想減衰器を配置することにより、この相対速度の大きさに依存した力（撃力）を考慮した接触力とすることができる。ただし、一度接触を判定しても侵入が解消されない場合がある。その際の組織から見た刃の相対速度が侵入方向と逆向きであった場合、仮想減衰器により生じる仮反力が侵入を促進する力となってしまう。従って、この

ような場合には仮想減衰器による仮反力を生じさせないようにすることで，侵入を促進させないようにする．

ペナルティ法で求める力は，接触しているという拘束条件を満たす力ではないが，一般に仮想バネ係数および仮想減衰器の粘性係数を大きく設定し，大きなペナルティ力を与えれば，侵入違反量を小さく抑えることができる [11]．この方法により計算を収束させるためには，計算の刻み幅 Δt を十分小さくしなければならない．しかし，本研究では高周波振動を扱うため，刻み幅をさらに小さく設定することが要求されている．また，振動振幅も小さいため安定した接触が得られやすいことが期待される．

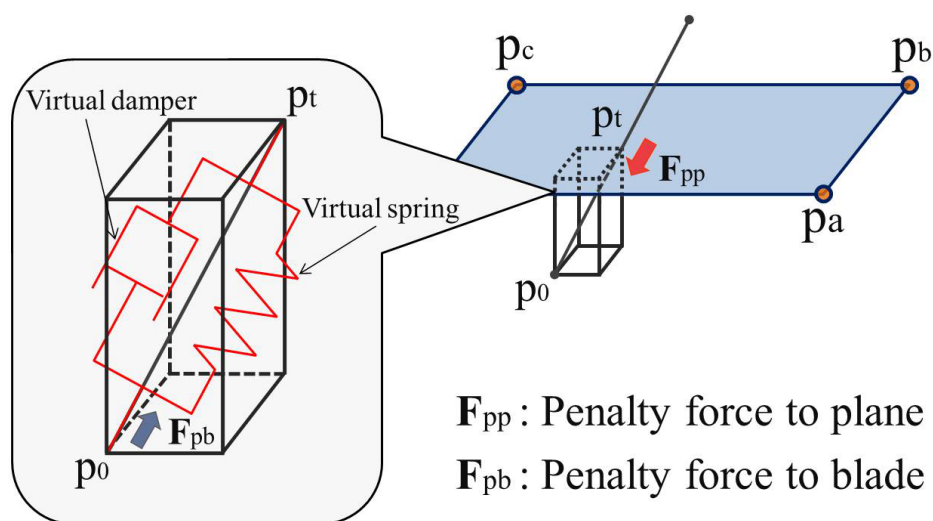


図 3.8: ペナルティ法

力の分配

点 $p_a \sim p_d$ により作られる四角形領域内の任意の位置に接触点は存在する．バネ質点モデルでは，力を作用させることができるのは質点のみであるため，ペナルティ力を接触点の位置に応じて面を構成する四頂点に分配させる必要がある．接触点の位置に応じたペナルティ力について図 3.9 に示す． $S_A \sim S_D$ は各領域の面積を表している．力の釣り合いを考え，接触点の位置に応じた力を式 (3.7)~式 (3.10) のように定義し，各頂点に分配する．

$$\mathbf{F}_a = \frac{S_B + S_C}{2(S_A + S_B + S_C + S_D)} \mathbf{F}_{pp} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{F}_b = \frac{S_C + S_D}{2(S_A + S_B + S_C + S_D)} \mathbf{F}_{pp} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{F}_c = \frac{S_D + S_A}{2(S_A + S_B + S_C + S_D)} \mathbf{F}_{pp} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{F}_d = \frac{S_A + S_B}{2(S_A + S_B + S_C + S_D)} \mathbf{F}_{pp} \quad (3.10)$$

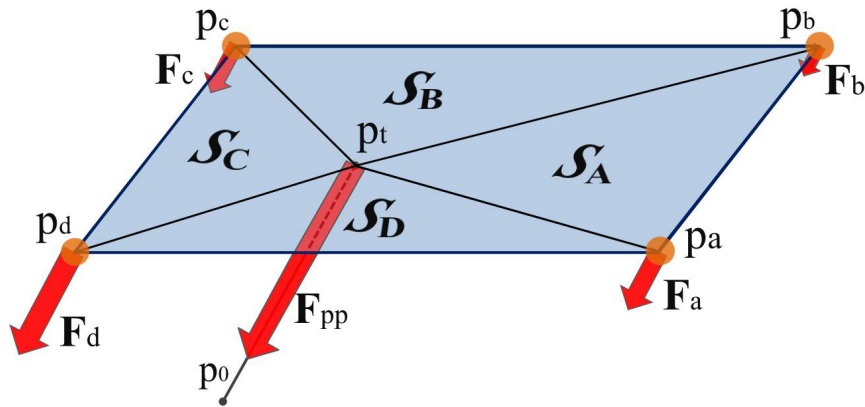


図 3.9: 接触位置に応じたペナルティ力

3.4 破壊条件

バネ質点モデルを用いて破壊現象を表現する場合は、一般にバネの自然長から閾値分だけ伸びる、もしくは縮んだ場合を破壊の基準とする。しかしそれでは、材料特性を十分に考慮した破壊モデルになっているとはいえない。また、本研究ではひずみ集中を扱っているため、荷重周辺におけるせん断ひずみを考える必要がある。さらに、生体組織は高周波振動による繰り返し荷重を負荷されるため、組織には疲労現象が生じると考えられる。これらのことを考慮するため、物体内の六面体小領域を取り出し、その小領域ごとに応力を求め、その応力値の大小や疲労の蓄積から破壊条件を定めることにより、破壊現象をより厳密に定義する。本節では、本モデルで用いている疲労破壊の概念より定義した破壊条件について述べる。

3.4.1 ミーゼス応力

ミーゼス応力とは材料の降伏の評価において広く使用される指標である。ミーゼス応力を用いることによって応力テンソルのような2階のテンソル量を0階のテンソル量（スカラー量）として定義することができるため、応力の大小比較を計算上容易に行うことができる。応力ベクトルの各成分より定義されるミーゼス応力 σ_{VM} を式 (3.11) に示す [12]。本研究では、2.3.2 節に示す方法により求まる六面体小領域ごとの応力ベクトルの各成分を用いてミーゼス応力を計算する。

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right\} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (3.11)$$

3.4.2 累積疲労損傷則による破壊条件

本小節では、累積疲労損傷則により定義した破壊条件について述べる。2.3.3 節に示したように、累積疲労損傷則を用いる場合は応力波形を必要とする。本研究では、応力波形として横軸を時間、縦軸をミーゼス応力値とした関係を用いる。図 3.10 に、六面体小領域ごとに得られる応力波形の一例を示す。本研究では、この応力波形から応力振幅を読み取るために、レンジカウント法と呼ばれる計数法を用いる。レンジカウント法とは、図 3.10 に示すように、応力波形の山と谷に着目し、その応力幅を応力振幅として読み取る手法である [13]。

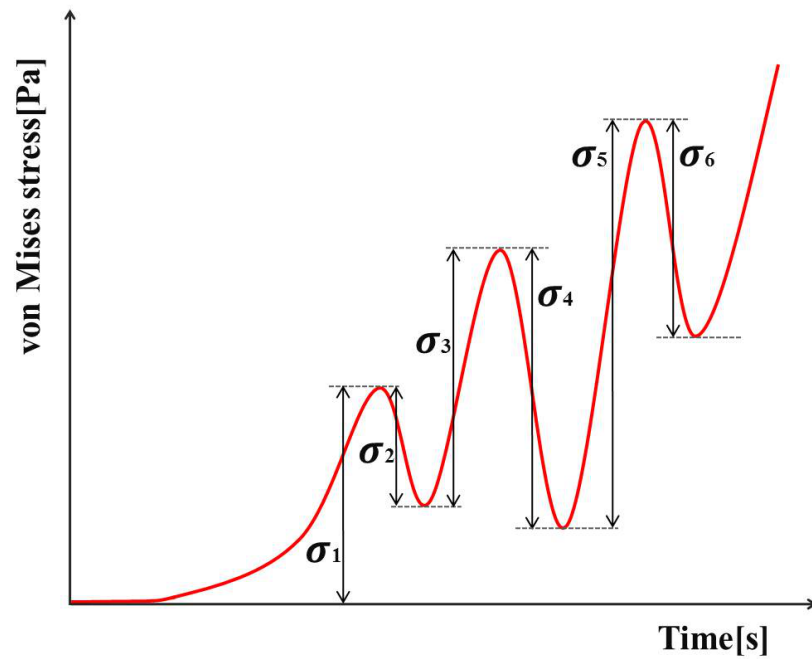


図 3.10: 得られる応力波形

次に、図 3.11 を用いて、S-N 線図の作成方法について述べる。数値計算において破壊を扱う場合は一般に、ミーゼス応力値がしきい値（破断応力値： σ_{thr} ）を超えた場合が破壊の条件とされる。つまり、繰り返し数が一回で疲労破壊に至る応力振幅を破断応力値として捉えることにより、破断応力値 σ_{thr} の点を図 3.11 のように打つことができると考えられる。また、疲労限度については 2.3.3 節に述べたように材料固有の値である引張強さとの相関より定義する。さらに、水平へと折れ曲がる際の繰り返し数 N_{FI} は実際の疲労試験によってしか得ることはできないため、任意の定数を仮定してシミュレーションを行う。

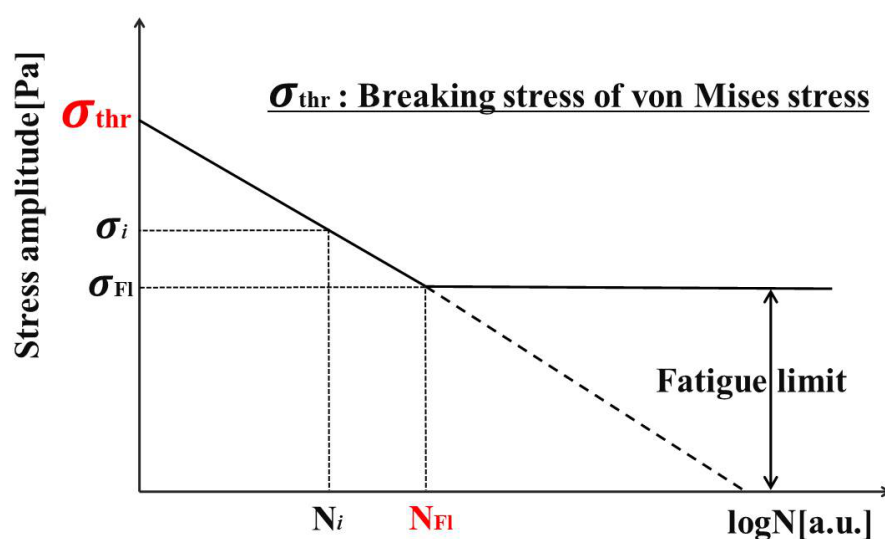


図 3.11: S-N 線図の作成

このように作成した S-N 線図の縦軸に対して、レンジカウント法により計数した応力振幅を用いることにより、修正マイナー則による累積疲労損傷則を本モデルに適用する。

3.5 破壊後の計算処理

本節では破壊条件を満たした六面体小領域に対して行う処理について述べる．まず図 3.12 左のように，外力により変形している物体を考える．ただし，説明を簡潔に行うため，図は二次元としており，また物体は有限個の四角形小領域に分割されているものとする．図 3.12 右は，この物体が破壊された状態を示している．青色で示した四角形小領域は破壊対象となった小領域（以下，破壊対象領域と呼ぶ）である．また， $L_1 \sim L_4$ は質点間の接続バネを示している．

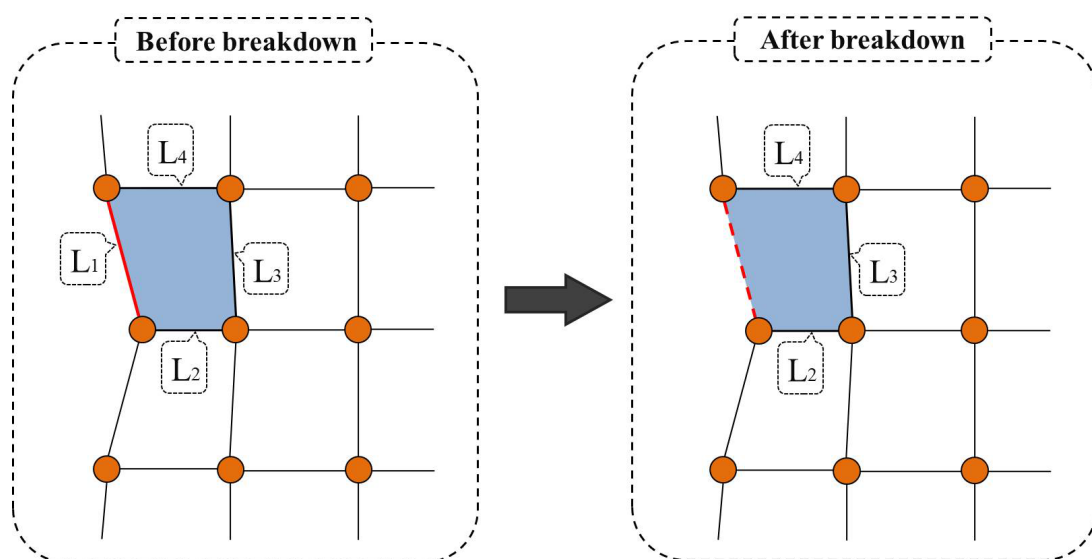


図 3.12: 接続が断たれるバネの選択

有限個の四角形小領域はそれぞれバネ 4 本により形成されている．ここで，破壊対象領域を形成しているバネ 4 本 ($L_1 \sim L_4$) について， L_1 と $L_2 \sim L_4$ に分けて考える．本研究では，破壊対象領域の破壊は，その小領域の消滅とみなす． $L_2 \sim L_4$ は，それぞれ破壊対象領域以外の四角形小領域を形成するバネでもある．それに対し， L_1 は破壊対象領域が消滅すると，全四角形小領域のどの形成バネでもなくなる．従って，このような場合はそのバネに対して質点間の接続を断つものとし，このバネに関する力の計算は以後行わない．

次に、小領域内を斜めに接続するせん断バネが追加された場合について考える。図 3.13 は、図 3.12 に対して破壊対象領域にのみせん断バネ (L_5, L_6) を書き加えた図である。せん断バネは小領域内に存在するバネであるため、小領域自体が消滅すると必要でなくなる。従って、破壊対象領域の消滅とともにせん断バネに対しても質点間の接続を断つものとする。

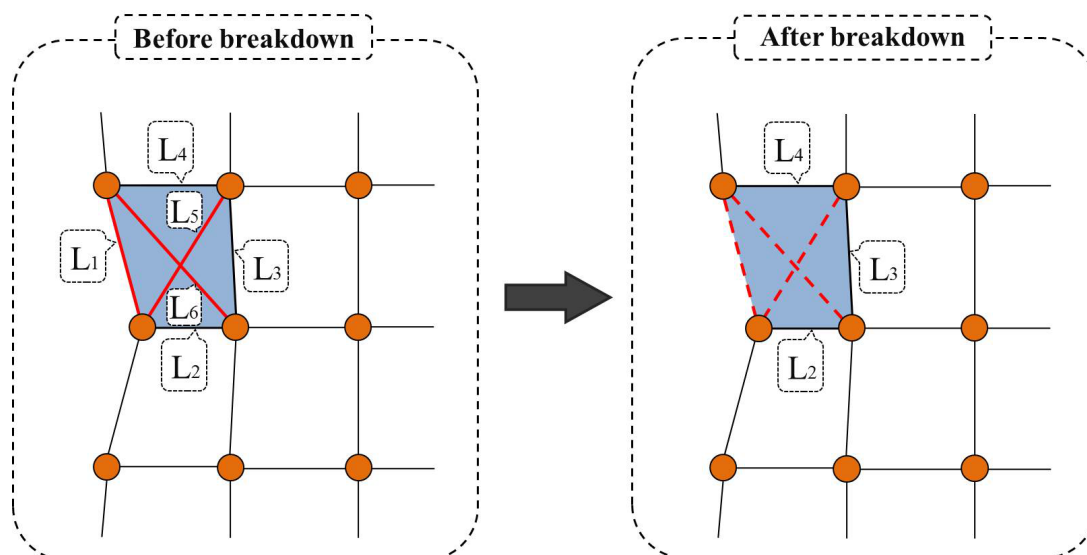


図 3.13: 接続が断たれるバネの選択 (せん断ばねを考慮した場合)

以上のことを踏まえ、図 3.14 を用いて三次元の場合を考える。今、青色で示した六面体小領域が破壊対象領域であるとする。また以下では、格子を縦横に接続する黒色で示すバネを格子バネ、格子の面内を斜めに接続する青色で示したバネを面せん断バネ、格子の内部を斜めに貫くように接続する赤色で示したバネを体積せん断バネと呼ぶ。

この破壊対象領域が消滅した場合に接続が断たれるバネは、(i) 手前の面 (薄橙色で示した面) に存在する面せん断バネ (二本)、(ii) 体積せん断バネ全て (四本) である。また、手前の面を形成する格子バネは、近傍の六面体小領域が消滅して初めて接続が断たれる。

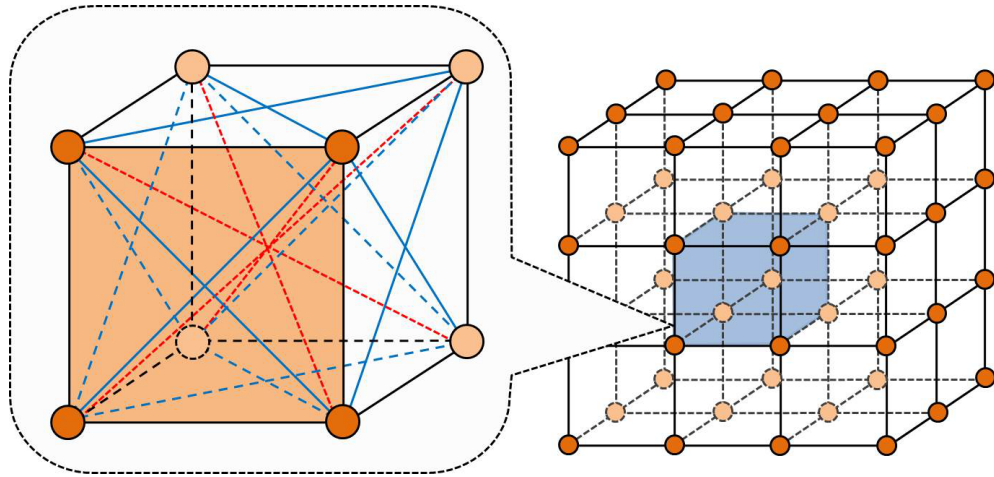


図 3.14: 接続が断たれるバネの選択 (三次元の場合)

次に、図 3.15 を用いて質点まわりの小領域が全て消滅した場合について考える。青色で示す二つの四角形小領域は破壊対象領域である。今、この二つの四角形小領域が破壊対象となったため、質点 i まわりには四角形小領域が存在しない。本研究では、このような場合はその質点自体も消滅したとみなす。構築したモデルでは三次元物体を扱っているため、同様の処理を三次元物体に対して行う。

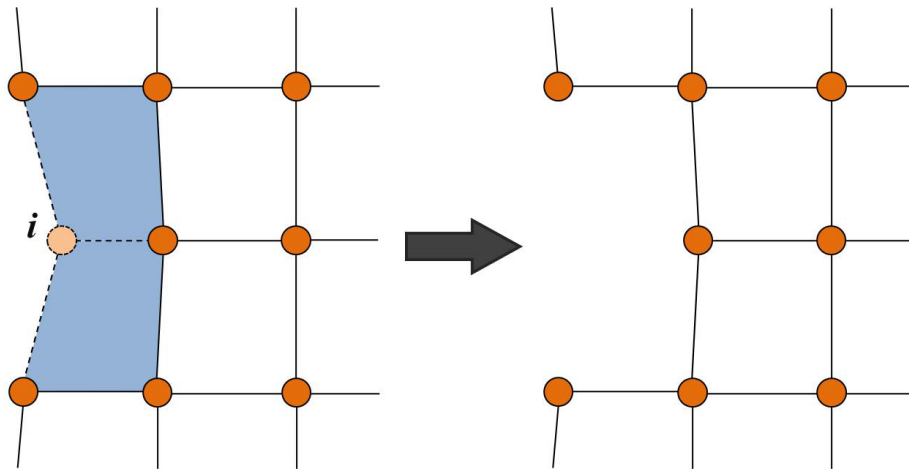


図 3.15: 質点まわりの小領域が全て消滅した場合

式 (2.25) に示す損傷度 D を小領域ごとに計算し、その値が 1 を越えていた場合は、その小領域に対して以上のような処理を行うことにより、破壊現象を表現する。

第4章 評価実験

本章では、提案手法を用いたことにより、高周波の振動を印加した際の切開現象についてシミュレーションが可能となっているかを評価する。まず4.1節にて実装環境について記した後、4.2節にて、本手法で用いた疲労破壊モデルの妥当性について評価および考察を行う。さらに、本手法の有効性を評価するために、様々な条件のもとシミュレーションを行った。4.3節では、構築したモデルや各シミュレーションパラメータの仕様について述べる。また4.4節では、各実装結果およびそれに対する考察について記述する。

4.1 実装システム

本モデルの実装に用いたコンピュータの仕様および開発環境を表4.1に示す。

表 4.1: コンピュータの仕様および開発環境

CPU	Intel Core i3-3217U 1.80 GHz
コア総数	2
メモリ	8.0 GB
グラフィックカード	Intel HD Graphics 4000
OS	Ubuntu 13.04 64bit
開発環境	Qt Creator 2.7.0

4.2 疲労破壊モデルの評価および考察

本節では、本手法で導入している疲労破壊モデル（2.3.3節，3.4.2節参照）の妥当性の評価について述べる。

疲労破壊モデルの導入により、破壊に至るまでの時間に変化が見られるかどうかを確認するために、応力波形を単純化し、解析を行った。物体内部に図4.1に示すような応力が発生している場合を考える。図4.1に示した関数は $\sigma(t) = t + t \sin \omega t$ で表される応力波形であり、線形関数に三角関数を重畳した関数である。

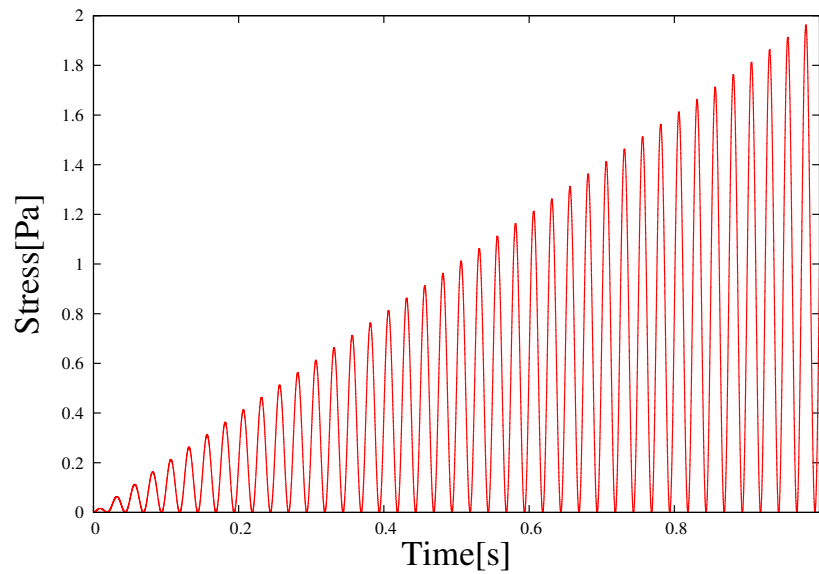


図 4.1: 応力波形の例（重畳三角関数の周波数：40 Hz）

ここで、物体が破壊に至る応力（破断応力値： σ_{thr} ）が 2 Pa であると仮定すると、疲労破壊モデルを考慮していない場合、破断に至る時刻は $t = 1$ である。しかしこれでは、 $\sigma(t) = 2t$ で表される応力などと区別がされない。本研究では疲労破壊モデルを導入しているが、以下では、疲労破壊モデルの導入により破断までの時間がどう変化するかについて、解析を行った。まず、重畳三角関数の周波数を変化させた場合について、表 4.2 に示す。S-N 線図が折れ曲がる際の繰り返し数 N_{Fl} は 1000 としている。

表 4.2: 重畳三角関数の周波数による破断時間の違い

重畳三角関数の周波数	破断に至った時間
100 Hz	8.07×10^{-1} s
1 kHz	6.40×10^{-1} s
10 kHz	4.73×10^{-1} s
40 kHz	3.74×10^{-1} s

次に、 N_{Fl} を変化させた場合について、表 4.3 に示す。重畳三角関数の周波数は 40 kHz とした。

表 4.3: N_{Fl} の値による破断時間の違い

N_{Fl}	破断に至った時間
100	8.32×10^{-2} s
1000	3.74×10^{-1} s
10000	5.46×10^{-1} s
100000	6.47×10^{-1} s

表 4.2 より，重畳三角関数の周波数が高くなるに従い，破断に至るまでの時間が短くなっていることが分かる．また表 4.3 より， N_{Fl} の値が大きくなるに従い，同時間が長くなっていることが分かる．

以上のことから，本モデルで用いている疲労破壊モデルの有効性が確認されたといえる．ただし， N_{Fl} は材料固有の値であり，シミュレーションと実際の物体とで整合を図ることは難しいため，以下では N_{Fl} の値を仮定し，シミュレーションを行っている．

4.3 構築したモデルおよび各シミュレーションパラメータ

図 4.2 に構築したモデルを示す．図 4.2 では，生体組織を質点および質点間に接続されるバネで表現している．また，刃を線分，刃先を質点として表現している．

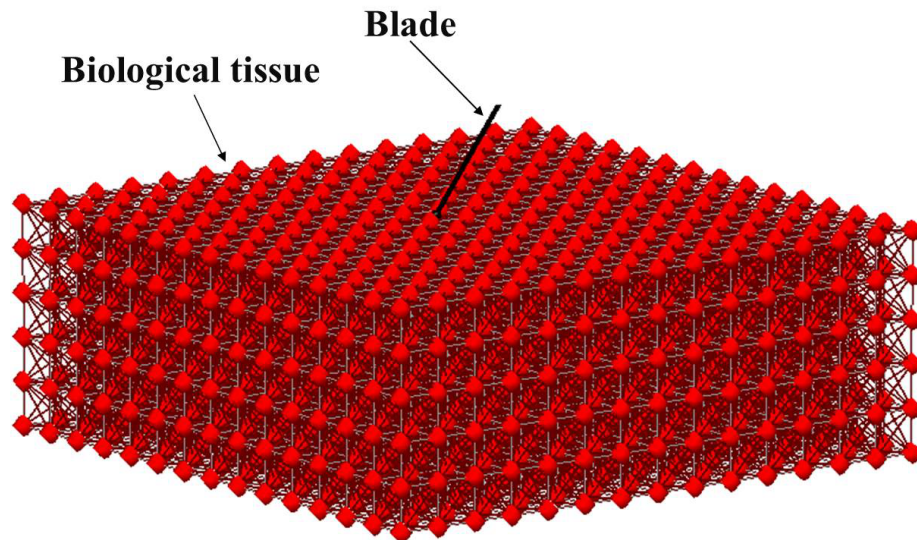


図 4.2: 構築したモデル

表 4.4 に刃のモデル仕様について示す．本モデルでは，刃は一定の速度で進行しているものと仮定する．

表 4.4: 刃のモデル仕様

質量	$5.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$
刃の長さ	$1.2 \times 10^{-2} \text{ m}$
刃の速度	$8.0 \times 10^{-2} \text{ m/s}$
振動周波数	45 kHz
振動振幅	100 μm

また、表 4.5 に生体組織のモデル仕様について示す。本研究では、質点の移動計算にバネ質点モデルを用いている。また、応力の導出では、ヤング率 E やポアソン比 ν といった材料パラメータを含む応力-ひずみ関係式を用いている。従って、本研究のシミュレーションでは、バネ係数 k とヤング率 E において整合を図る必要がある。一般に、バネ係数 k とヤング率 E には式 (4.1) に示す関係がある [14]。 l はバネの自然長である。本シミュレーションでは、ヤング率 E の値を実際の生体組織に近い値とし、 E の値から k の値を算出している。

$$E = \frac{10}{3} (1 + \nu) \frac{k}{l} \quad (4.1)$$

表 4.5: 生体組織のモデル仕様

質点数	1575
六面体数	980 (14 × 14 × 5)
各六面体の大きさ	4 mm × 4 mm × 4 mm
全体の大きさ	56 mm × 56 mm × 20 mm
格子バネ (本数)	3645
格子バネ (バネ係数)	7.28×10^2 N/m
面せん断バネ (本数)	6552
面せん断バネ (バネ係数)	1.03×10^3 N/m
体積せん断バネ (本数)	3920
体積せん断バネ (バネ係数)	1.26×10^3 N/m
粘性係数	7.0×10 N·s/m
ヤング率	0.85 MPa
ポアソン比	0.4

次に、各シミュレーションパラメータの仕様を表 4.6 に示す。本研究では、引張強さがミーゼス破断応力値に一致していると仮定し、疲労強度を算出した。

表 4.6: シミュレーションパラメータの仕様

仮想バネ係数	1.0×10 N/m
仮想減衰器の粘性係数	1.0×10^4 N·s/m
ミーゼス破断応力値	1.5×10^6 Pa
疲労強度	7.5×10^5 Pa
繰り返し数 N_{Fl}	1000
刻み幅	1.0×10^{-6} s

4.4 シミュレーション結果および考察

4.4.1 実装の様子

実装の様子を図 4.3 に示す。図 4.3 は刃を組織の表面に対して平行に動かした場合である。図 4.3 左では、物体の上面および破壊領域面のみに色を付けている。また、灰色の線は質点間を接続する格子バネを表している。さらに、図 4.3 右では、組織上面および破壊領域表面の応力値の大きさをカラーコンター図により表現した。図 4.3 の動画より、応力値が大きい箇所から破壊されていることが確認される。

図 4.3: 刃を組織の表面に対して平行に動かした場合

4.4.2 振動振幅を変化させた場合

実際の超音波メスの使用においては、凝固よりも切開に重視した操作を行いたい場合、振動摩擦熱による組織の温度変化を小さくするために素早く切開を行う。素早い切開を行うためには、一般に高振幅の振動を用いて操作を行う。一方、凝固に重視した操作を行いたい場合は、低振幅の振動を用いることにより達成することができる。

本モデルにおいて、破壊速度が刃の振動振幅の大きさに依存して変化するかどうかを確認するために、振動振幅の大きさを変化させてシミュレーションを行った。シミュレーションの様子を図 4.4 に示す。刃を組織に対して垂直にし、六面体小領域が最初に破壊されるまでの時間を振動振幅を変化させて観測した。このシミュレーションでは図 4.4 左に示すように

破壊された。これは、せん断ひずみによる変形が要因だと考えられる。さらに、図 4.4 右では、刃と組織間の接触状況を示している。図 4.4 の動画より、大侵入などは起こらず、接触が保たれていることが確認される。

図 4.4: 六面体小領域が破壊されるまでの様子および刃と組織間の接触状況

振動振幅による破壊時間の違いを表 4.7 に示す。結果として、振幅が大きくなるに従い、破壊されるまでの時間が短くなる傾向がみられた。従って、振動振幅の違いによる組織への作用を本モデルにより表現できていることが確認された。

表 4.7: 振動振幅による破壊時間の違い

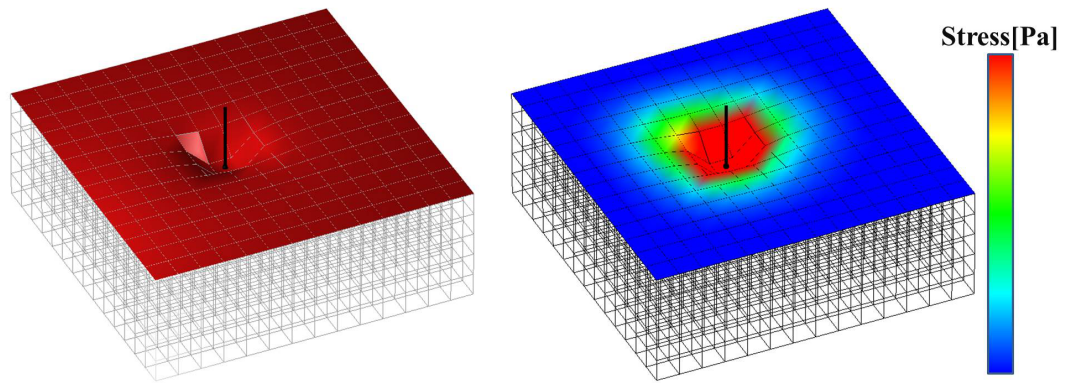
振幅	破壊に至った時間
75 μm	$4.24 \times 10^{-3} \text{ s}$
100 μm	$4.11 \times 10^{-3} \text{ s}$
125 μm	$4.05 \times 10^{-3} \text{ s}$

4.4.3 振動印加時と振動非印加時の比較

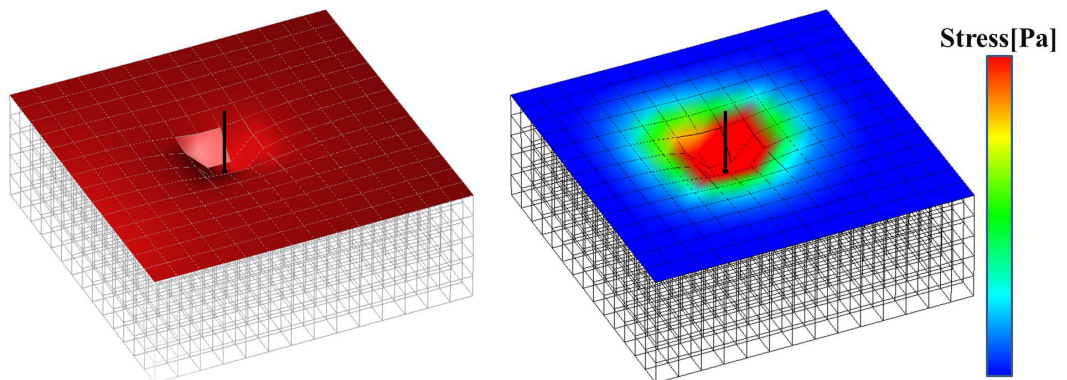
ひずみの集中（応力の集中）を本モデルで表現できているか確認するために、刃に振動を印加した場合と印加しなかった場合において、破壊されるまでの時間や応力分布の違いが観測されるか比較した。4.4.2 節で行ったシミュレーションと同じように、刃は組織に対して垂直とした。図 4.5 に、行ったシミュレーションを示す。図 4.5 の上段は振動印加時の様子、

下段は振動非印加時の様子である．どちらの場合も，破壊が発生し始めた時の様子を示している．また，図 4.5 右では応力分布を示している．

振動印加時の方が非印加時に比べ，組織が破壊されるまでの時間は短いという結果になった．しかし，振動印加時のひずみの集中は観測されなかった．刃が接触し，その超音波振動により組織における荷重局所部分が強制振動するが，刃から離れた組織の部分はその振動に追従することができないため，その結果としてひずみの集中が発生する．しかし，本シミュレーションにおいてはそのような効果を十分に表現することができなかった．これは，刃から離れた組織部分の追従現象が，組織の物性パラメータにより大きく左右されるためだと考えられる．従って，ひずみの集中を表現するためには，組織の物性パラメータを十分に考慮し，各シミュレーションパラメータを設定する必要があると思われる．



(a) 振動印加時 周波数 45 kHz ($t = 4.10 \times 10^{-3}$ s)



(b) 振動非印加時 ($t = 4.50 \times 10^{-3}$ s)

図 4.5: 振動印加時と振動非印加時の比較

4.4.4 生体組織の物性パラメータを変化させた場合

本モデルでは、一般的な弾性体理論に基づき、ひずみや応力を定義している。そこで、本手法により構築した弾性体モデルが、一般的な弾性体の性質を有するモデルになっているかどうかを確認するために、生体組織のヤング率を変化させてシミュレーションを行った。行ったシミュレーションは4.4.2節で行ったシミュレーションと同様で、六面体小領域が最初に破壊されるまでの時間を観測した。表4.8に、シミュレーション結果を示す。また、図4.6に破壊時の応力分布を示す。

表 4.8: ヤング率による破壊時間の違い

ヤング率	破壊に至った時間
0.25 MPa	4.37×10^{-3} s
0.45 MPa	4.29×10^{-3} s
0.65 MPa	4.25×10^{-3} s
0.85 MPa	4.10×10^{-3} s

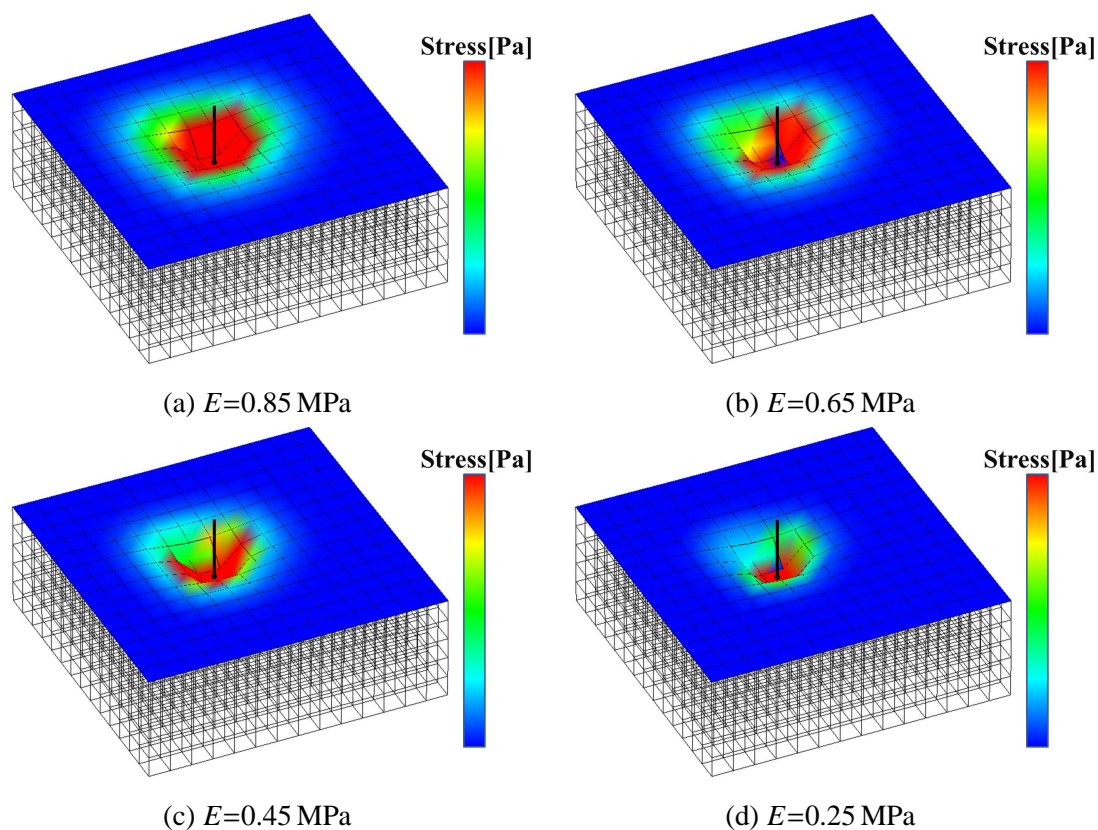
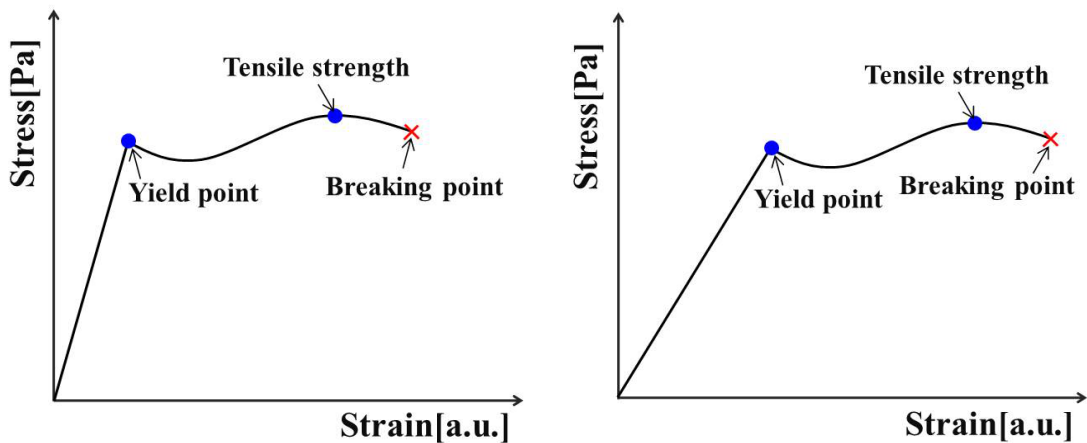


図 4.6: ヤング率による応力分布の違い

結果として、ヤング率が大きい組織の方が早く破壊された。弾性体とは元々、図 4.7 に示すような応力ひずみ線図を描き、ヤング率の大小はこの応力ひずみ線図の直線部分の傾きの大小に一致する。つまり、ヤング率の大きい弾性体はヤング率の小さい弾性体に比べて、同等のひずみでも大きな応力が物体内部に生じ、ヤング率が小さい組織よりも早く破壊条件を満たす。これは、本シミュレーション結果に等しい。以上のことから、本手法により構築した生体組織のモデルにおいて一般的な弾性体の性質を表現できていることが確認された。



(a) ヤング率が大きい場合

(b) ヤング率が小さい場合

図 4.7: ヤング率による応力ひずみ線図の違い

第5章 結論

本研究では、刃に超音波振動が印加された場合の切開現象に焦点を当て、シミュレーションが可能であるモデルの構築を行った。生体組織の変形モデルには、Kelvin-Voigt モデルによる三次元バネ質点モデルを用いた。また、刃と組織表面の接触問題については、ペナルティ法を用いることで、接触に関する整合性を得た。さらに、六面体小領域ごとに計算される応力ベクトルよりミーゼス応力を算出し、これを修正マイナー則による累積疲労損傷則に適用することで破壊条件を得た。

さらに、本手法の有効性を評価するために、振動振幅や組織のヤング率を変化させてシミュレーションを行った。その結果、本手法により構築したモデルでは、一般的な弾性体理論に基づく生体モデルの構築および実際の超音波メスと等価な作用を有する切開モデルの構築を行うことができていることが確認された。

本研究の課題としては、まず組織の物性パラメータや各シミュレーションパラメータを正確に設定することが挙げられる。さらに、破壊の際には六面体小領域が消滅しているため、この際に質量の減少が生じてしまう、従って消滅時には周りの六面体小領域への質量の振り分けなどを考える必要がある。また、組織と刃の間の摩擦やそれに伴う熱の発生についても考慮することが必要であると考えられる。

本手法では実際の物理則に従うモデル構築を行うことを目的としているため、実時間での処理は行えていないが、計算の高速化を図ることにより、手術シミュレーションシステムや手術トレーニングシステムへの応用が期待される。

謝 辞

本研究は、大阪大学 基礎工学部 大城研究室で行ったものである。

本年度にこの大城研究室に配属させて頂き、一年間という短い期間ではありますが、私はこの一年間の研究室生活を通して、学問的なことのみならず、研究活動の難しさや楽しさ、時には社会の厳しさなども学ぶことができました。このような研究活動の場を与えて下さった、大阪大学 大学院基礎工学研究科 大城理教授に篤く御礼を申し上げます。常に多方面の着眼点から助言を下さり、私達学生の知見を広げて頂きました。重ねて感謝申し上げます。

また、種々の研究機材を用意し、普段のゼミなどでも的確な指導をしてくださいました、大阪大学 大学院基礎工学研究科 井村誠孝准教授に深く感謝致します。

さらに、私の担当教員として一年間尽力して下さいました、大阪大学 サイバーメディアセンター 情報メディア教育研究部門 黒田嘉宏准教授（元大城研究室助教）に心から感謝致します。本年度後期より部署が変わられるということで不安ではありましたが、お忙しい中も週に複数度のミーティングの場を設けて下さり、本当に親身に研究にお付き合い頂きました。重ねて御礼を申し上げたいと思います。

また、普段より研究のことに限らず様々な会話をさせて頂き、他の先生方よりも学生に近い立場から様々なアドバイスを下さいました大阪大学 大学院基礎工学研究科 浦西友樹助教に感謝致します。さらに、本年度後期よりお越しになられた大阪大学 大学院基礎工学研究科 吉元俊輔助教には、大城研究室の先輩でもあるという点から様々なアドバイスを頂きました。有難うございます。

また、研究内容に行き詰まった際に多くの助言を下さり、連日遅くまでプログラムの仕方や論文作成について教えてくださいました、大城研究室の先輩方に感謝致します。さらに、研究活動における難しさや楽しさを誰よりも分かち合い、そして互いに切磋琢磨した同期の皆様にも深く感謝致します。

最後になりましたが、常に私の健康状態などを気遣い、どんな時もサポートし続けてくれた家族に感謝の意を述べたいと思います。私が研究活動に励むことができたのも、陰で支えてくれた家族の存在があったおかげです。本当に心から感謝します。

参考文献

- [1] 千原國宏. 超音波, p. 1. コロナ社 (東京), 2001.
- [2] 桑原利彦. 非線形有限要素法, 第 1 章, pp. 22–23. コロナ社 (東京), 1994.
- [3] 濱田友貴. GPU を用いた粘弾性表現. 大阪大学基礎工学部卒業論文, pp. 9–10, 2009.
- [4] 竹内則雄, 檜山和男, 寺田賢二郎. 計算力学, pp. 6–7. 森下出版株式会社 (東京), 2003.
- [5] D.Bielser and M.H.Gross. Interactive simulation of surgical cuts. *in Proceedings of Pacific Graphics*, pp. 116–125, 2000.
- [6] 河本敏孝. 実時間切開シミュレーションのための有限要素モデリング方法. 奈良先端科学技術大学院大学修士論文, 2007.
- [7] 田中翔太. 電熱構造連成シミュレーション. 大阪大学大学院基礎工学研究科修士学位論文, 2010.
- [8] 海老名孝介, 長谷川英之, 金井浩. 超音波メスによる軟組織切離における周波数依存性に関する研究. 東北大学電通談話会記録, Vol. 76, No. 1, pp. 344–345, 2007.
- [9] HARMONIC SYNERGY Blades. <http://www.ethicon.com/healthcare-professionals/products/advanced-energy/harmonic/harmonic-synergy-blades>. (参照 2014-2-12).
- [10] 三好俊郎. 有限要素法入門, pp. 118–124. 培風館 (東京), 1994.
- [11] 長谷川晶一. バーチャルリアリティのためのモデリング. 日本知能情報ファジィ学会誌, Vol. 19, No. 4, pp. 1–7, 2007.
- [12] 泉聡志, 酒井信介. 実践有限要素法シミュレーション, pp. 78–79. 森下出版株式会社 (東京), 2010.
- [13] 堀川武. 疲労設計便覧, 第 8 章, p. 207. 養賢堂 (東京), 1995.
- [14] 広田光一, 高橋英嗣, 金子豊久, 関口隆三, 森山紀之. 手術シミュレーションのための柔らかい臓器のモデルと操作環境. *Medical Imaging Technology*, Vol. 16, No. 1, pp. 31–42, 1998.